0.1　古典群

行列の成す群は基本的でありながらも深い研究対象である。通常行列というと、高校３年の数Ｃで登場し大学１年のとき線形代数で扱って、それからご無沙汰になってしまう。

Definition 0.1.1

$$M_n(\mathbf{R}) = \{\ \text{実数値}\ n \times n\ \text{行列}\ \}$$
$$GL_n(\mathbf{R}) = \{\ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) \neq 0\ \}$$
$$SL_n(\mathbf{R}) = \{\ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 1\ \}$$
$$O(n) = \{\ A \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tAA = E\ \} \quad n\ \text{次直交群}$$
$$SO(n) = \{\ A \in O(n) \mid \det(A) = 1\ \} \quad n\ \text{次回転群（特殊直交群）}$$

実数を複素数に変えても同様の定義ができる。

$$M_n(\mathbf{C}) = \{\ \text{複素数値}\ n \times n\ \text{行列}\ \}$$
$$GL_n(\mathbf{C}) = \{\ A \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det(A) \neq 0\ \}$$
$$SL_n(\mathbf{C}) = \{\ A \in M_n(\mathbf{C}) \mid \det(A) = 1\ \}$$
$$U(n) = \{\ A \in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^*AA = E\ \} \quad n\ \text{次ユリタリー群}$$
$$SU(n) = \{\ A \in U(n) \mid \det(A) = 1\ \} \quad n\ \text{次特殊ユリタリー群}$$

ただし、${}^*A = {}^t\overline{A}$ である。

さらに四元数にまで発展できる。ただし、四元数体の積は可換ではないので行列式に相当する概念を定義する事は難しい。

$$M_n(\mathbf{H}) = \{\ \text{四元数値}\ n \times n\ \text{行列}\ \}$$
$$GL_n(\mathbf{C}) = \{\ A \in M_n(\mathbf{H}) \mid A\ \text{の逆行列が存在する}\ \}$$
$$Sp(n) = \{\ A \in M_n(\mathbf{H}) \mid {}^*AA = E\ \} \quad n\ \text{次シンプレクティック群}$$

$GL_n(\mathbf{R})$, $GL_n(\mathbf{C})$, $GL_n(\mathbf{H})$ は一般線形群と呼ばれる。また、$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ をまとめて古典群と呼ぶ。

Remmark 0.1.2

$M_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2}$, $M_n(\mathbf{C}) = \mathbf{R}^{2n^2}$, $M_n(\mathbf{H}) = \mathbf{R}^{4n^2}$ と同一視して、Def 0.1.1 のすべての行列集合をこれらの部分空間として位相空間とみなす。

Remmark 0.1.3

$M_n(\mathbf{R})$, $M_n(\mathbf{C})$, $M_n(\mathbf{H})$ は行列の和により位相群となる。

Remmark 0.1.4

$GL_n(\mathbf{R})$, $SL_n(\mathbf{R})$, $O(n)$, $SO(n)$, $GL_n(\mathbf{C})$, $SL_n(\mathbf{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $GL_n(\mathbf{H})$, $Sp(n)$ は行列の積により位相群となる。

Definition 0.1.5

位相群 G の部分空間 H において、G の演算の制限によって H が位相群となるとき、H を G の部分群と呼ぶ。また H を閉集合とするとき、H を閉部分群とする。

Remmark 0.1.6

$SL_n(\mathbf{R}) \subset GL_n(\mathbf{R})$, $SL_n(\mathbf{C}) \subset GL_n(\mathbf{C})$

$SO(n) \subset O(n) \subset GL_n(\mathbf{R})$, $SU(n) \subset U(n) \subset GL_n(\mathbf{C})$, $Sp(n) \subset GL_n(\mathbf{H})$

$GL_n(\mathbf{R}) \subset GL_n(\mathbf{C}) \subset GL_n(\mathbf{H})$, $O(n) \subset U(n) \subset Sp(n)$

の inclusion で閉部分群となる。

Remmark 0.1.7

$GL_n(\mathbf{C}) \subset GL_{2n}(\mathbf{R})$, $GL_n(\mathbf{H}) \subset GL_{2n}(\mathbf{C})$, $U(n) \subset O(2n)$, $Sp(n) \subset U(2n)$

とみなす事ができる。

proof)　　例えば $k : GL_n(\mathbf{C}) \longrightarrow GL_{2n}(\mathbf{R})$ を $A \in GL_n(\mathbf{C})$ に対し、$A = A_0 + iA_1$ $(A_0, A_1 \in GL_n(\mathbf{R}))$ と分解する。

$$k(A) = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 \\ A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

で定義すれば、これは単射準同型となる。

□

さてでは次数の低いところでこれらの古典群がどうなっているのかを見てみよう。$n = 1, 2$ ぐらいはかなり単純である。証明はかなり省く。

Example 0.1.8

$SO(1) = \{1\}$, $SU(1) = \{1\}$

Example 0.1.9

$O(1) \cong S^0$, $U(1) \cong S^1$, $Sp(1) \cong S^3$

Example 0.1.10

$GL_1(\mathbf{R}) \cong S^0 \times \mathbf{R}$, $GL_1(\mathbf{C}) \cong S^1 \times \mathbf{R}$

proof)　$GL_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} - \{0\} \cong S^0 \times \mathbf{R}$ であり、$GL_1(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C} - \{0\} \cong S^1 \times \mathbf{R}$ □

続いて、$n = 2$ のとき。

Example 0.1.11

$SO(2) \cong S^1$

proof)　$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbf{R} \right\}$ と書ける。$SO(2) \longrightarrow S^1$ を、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto e^{i\theta}$$

で定義すればこれは同型となる。

□

Example 0.1.12

$O(2) \cong S^0 \times S^1$

proof)　$O(2) \cong S^1 \coprod \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^1 \cong S^0 \times S^1$

□

Example 0.1.13

$SU(2) \cong S^3$

proof)　　$A \in SU(2)$ は、$A = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$　　（$|a^2| + |b^2| = 1$）の形をしている。よって、$SU(2) \longrightarrow Sp(1)$ を、

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \mapsto a + bj$$

で定義すればこれが同型となる。Example 0.1.9 により、$Sp(1) \cong S^3$ なので示せる。

$\square$

一般に n のときは単に求めるのは中々難しいが、商空間にすると簡単である。

Lemma 0.1.14

$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ は compact である。

proof)　　例えば、$f : M_n(\mathbf{R}) \longrightarrow M_n(\mathbf{R})$ を $A \mapsto^t AA$ で定義すればこれは連続である。$O(n) = f^{-1}(E)$ である。E は $M_n(\mathbf{R})$ は一点集合で閉集合なので、$O(n)$ は閉集合である。また、${}^tAA = E$ という事は A の各成分 a_{ij} は $|a_{ij}| \leqq 1$ となるので $O(n)$ は有界である。$M_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2}$ 上での有界閉集合は compact なので、$O(n)$ は compact である。

$\square$

Theorem 0.1.15

$$\det : O(n) \longrightarrow S^0 \quad , \quad \det : U(n) \longrightarrow S^1$$

は、

$$O(n)/SO(n) \cong S^0 \quad , \quad U(n)/SU(n) \cong S^1$$

を誘導する。

proof)　　det は全射であり、$\mathrm{Ker}\{1\} = SO(n)$ or $SU(n)$ であるため、なので、連続な全単射

$$O(n)/SO(n) \longrightarrow S^0 \ , \ U(n)/SU(n) \cong S^1$$

を誘導する。$O(n), U(n)$ は compact なので同相となる。

□

これら古典群の基本群（ホモトピー群）を計算するためには、ファイバー束との関連は重要である。が、同時にファイバー束を示すのはかなりの重労働であった。しかし、その必要条件ととして local cross section を持つというのがあった。詳しくは位相群の章を参照。

Lemma 0.1.16

G を位相群とし、H をその部分群とし、射影 $p : G \longrightarrow G/H$ が local cross section を持つとき、p は主 H-bundle である。

次に問題となるのが local cross section を持つ必要条件である。簡単に言うと Lie 群というのを考えればよい。Lie 群を定義するのは後回しにして、次の二つのことを認めてほしい。

Definition 0.1.17

一般線形群 $GL_n(\mathbf{R})$, $GL_n(\mathbf{C})$, $GL_n(\mathbf{H})$ および、古典群 $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ は Lie 群である。

Theorem 0.1.18

G を Lie 群、H をその閉部分群としたとき、射影 $p : G \longrightarrow G/H$ は local cross section を持つ。

Corollary 0.1.19

G を Lie 群、H をその閉部分群としたとき、射影 $p : G \longrightarrow G/H$ は主 H-bundle である。

Lemma 0.1.20

$O(n-1) \subset O(n)$, $U(n-1) \subset U(n)$, $Sp(n-1) \subset Sp(n)$, $SO(n-1) \subset SO(n)$, $SU(n-1) \subset SU(n)$ と考える事ができる。

proof)　　$j : O(n-1) \longrightarrow O(n)$ を、$j(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で定義すればこれは単射準同型になるので、$O(n-1) \subset O(n)$ と見なせる。そのほかも同じである。

$\square$

次の命題は以前考えたものである。

Proposition 0.1.21

位相群 G は位相空間 X に推移的に働いているとする。このとき、$x_0 \in X$ に対し、$G/Iso_{x_0} \cong X$ である。

Theorem 0.1.22

$$O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}\ ,\ U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1}\ ,\ Sp(n)/Sp(n-1) \cong S^{4n-1}$$
$$SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}\ ,\ SU(n)/SU(n-1) \cong S^{2n-1}$$

proof) $\mu : O(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ を、ベクトルの積 $\mu(A, x) = Ax$ で定義する。このとき、

$$||Ax||^2 = Ax \cdot Ax = x \cdot^t AAx = x \cdot x = ||x||^2 = 1$$

なので、$Ax \in S^{n-1}$ となる。これは作用となり、任意に $x \in S^{n-1}$ をとると、$\mathbf{R}^n$ の x を含む正規直交基底 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n = x\}$ をとる事ができる。各 a_i は $1 \times n$ 行列と見なしたとき、

$$A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \cdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix}$$

とおく。$A \in O(n)$ である。

$$A^t A = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \cdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} {}^t a_1 a_1 & \cdots & {}^t a_1 a_n \\ {}^t a_2 a_1 & \cdots & {}^t a_2 a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^t a_n a_1 & \cdots & {}^t a_n a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

であるため、

$$Ax = Aa_n = \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \cdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} a_n = \begin{pmatrix} {}^t a_1 a_n \\ {}^t a_2 a_n \\ \cdots \\ {}^t a_n a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_n$$

これより、$x \in S^{n-1}$ に対し、$A \in O(n)$ が存在し、$Ax = e_n$ を満たす。よって $y \in S^{n-1}$ に対しても、$B \in O(n)$ が存在し、$By = e_n$ を満たす。よって、$A^{-1}B \in O(n)$ において、

$$\mu(A^{-1}B, y) = A^{-1}By = A^{-1}e_n = x$$

なので μ は推移的に働く。よって、$O(n)/Iso_{e_n}(O(n)) \cong S^{n-1}$ である。最後に $Iso_{e_n}(O(n))$ が何なのかを探っていく。

$$Iso_{e_n}(O(n)) = \{ \ A \in O(n) \mid Ae_n = e_n \ \}$$

であるが、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

を計算すると、$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ 1_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ となるわけで、${}^tAA = E$ なので、$\begin{pmatrix} a_{n1} \\ 1_{n2} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。よって、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-11} & 0 \\ a_{12} & \cdots & a_{n-12} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n-1} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、$A \in O(n-1)$ となる。逆に $A \in O(n-1)$ ならば、$Ae_n = e_n$ となる事は簡単にわかるので、$Iso_{e_n}(O(n)) = O(n-1)$ である。これより、$O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$ となる。ほかも同様である。

□

local cross section ではなく、単なる cross section を持つ場合にはもっとよい性質があった。

Proposition 0.1.23

位相群 G とその部分群 H に対し、射影 $p : G \longrightarrow G/H$ が cross section を持てば $G \cong G/H \times H$ である。

次の形も覚えておくと便利かもしれない。

Proposition 0.1.24

位相群 G が位相空間 X に作用しているとする。このとき、$x_0 \in X$ に対し、$p : G \longrightarrow X$ を $p(g) = gx_0$ で定義する。このとき、p が cross section を持てば、$G \cong Iso_{x_0}(G) \times X$ である。

Theorem 0.1.25

$O(n) \cong S^0 \times SO(n)$, $U(n) \cong S^1 \times SU(n)$

proof) $\mu : O(n) \times S^0 \longrightarrow S^0$ を $\mu(A, a) = \det(A)a$ で定義するとこれは作用となる。$Iso_1(O(n)) = SO(n)$ である。また、$p : O(n) \longrightarrow S^0$ を、$p(A) = \det(A) \cdot 1$ で定義する。つまり、$p = \det$ である。このとき、$s : S^0 \longrightarrow O(n)$ を、

$$s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

で定義すれば、$p \circ s(a) = a$ を満たすので s は p の cross section である。よって、$O(n) \cong S^0 \times SO(n)$ である。同様に、$U(n) \cong S^1 \times SU(n)$ も示せる。

□

では古典群の基本群について考えてみよう。その前の $\mathbf{R}P^n$ の基本群を考えておこう。

Theorem 0.1.26 $\mathbf{R}P^n$

$$\pi_1(\mathbf{R}P^n) = \begin{cases} \mathbf{Z} & n = 1 \\ \mathbf{Z}_2 & n \geqq 2 \end{cases}$$

proof) $n = 1$ のときは、$\mathbf{R}P^1 \cong S^1$ なので成り立つ。$n \geqq 2$ に対して、射影 $p : S^n \longrightarrow \mathbf{R}P^n$ は S^0 をファイバーとするファイバー束なので、

$$\pi_1(S^n) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{R}P^n) \longrightarrow \pi_0(S^0) \longrightarrow \pi_0(S^n)$$

の完全列から両側が 0 なので、$\pi_1(\mathbf{R}P^n) \cong \pi_0(S^0) \cong \mathbf{Z}_2$ は集合として同型である。しかし、今 $\mathbf{Z}_2$ は 2 つの元からなる群なので、群としての同型を導く。

□

Theorem 0.1.27　*SO(n)*

$$\pi_1(SO(n)) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ \mathbf{Z} & n = 2 \\ \mathbf{Z}_2 & n \geqq 3 \end{cases}$$

proof)　$SO(1) = \{1\}$ であり、$SO(2) \cong S^1$、そして $SO(3) \cong \mathbf{R}P^3$ であるので $n = 3$ までは成り立っている。このとき、$n \geqq 4$ のときは、帰納的に考える。$\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbf{Z}_2$ と仮定する。射影 $SO(n) \longrightarrow SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$ は CW 複体上のファイバー束だから、ホモトピー群の完全列を派生する。

$$\pi_2(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \longrightarrow \pi_1(SO(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{n-1})$$

の完全列で両側は 0 なので、$\pi_1(SO(n)) \cong \pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbf{Z}_2$ である。

□

Theorem 0.1.28　*SU(n)*

$\pi_1(SU(n)) = 0$

proof)　$SU(1) = \{1\}$ なので $n = 1$ のときは成り立つ。$n \geqq 2$ のときは帰納法を用いる。$\pi_1(SU(n-1)) = 0$ と仮定する。

$$\pi_1(SU(n-1)) \longrightarrow \pi_1(SU(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{2n-1})$$

で両側は 0 なので、$\pi_1(SU(n)) = 0$

□

Theorem 0.1.29　*O(n)*

$$\pi_1(O(n)) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ \mathbf{Z} & n = 2 \\ \mathbf{Z}_2 & n \geqq 3 \end{cases}$$

proof)　$O(n) \cong S^0 \times SO(n)$ なので、

$$\pi_1(O(n)) \cong \pi_1(S^0 \times SO(n)) \cong \pi_1(S^0) \oplus \pi_1(SO(n)) = \pi_1(SO(n))$$

なので成り立つ。

□

Theorem 0.1.30 *U(n)*

$\pi_1(U(n)) \cong \mathbf{Z}$

proof) $U(1) \cong \mathbf{Z}$ なので、$n = 1$ のときは成立する。$n \geqq 2$ のときは帰納的に示す。$\pi_1(U(n-1)) \cong \mathbf{Z}$ と仮定する。

$$\pi_2(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_1(U(n-1)) \longrightarrow \pi_1(U(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{2n-1})$$

で両側が 0 なので、$\pi_1(U(n)) \cong \pi_1(U(n-1)) \cong \mathbf{Z}$

□

Theorem 0.1.31 *Sp(n)*

$\pi_1(Sp(n)) = 0$

proof) $Sp(1) \cong S^3$ であるので、$n = 1$ のときは成立する。あとは同様に、$Sp(n) \longrightarrow Sp(n)/Sp(n-1) \cong S^{4n-1}$ のファイバー束のホモトピー完全列で帰納法を用いれば示せる。

□

これらの考えを発展させて古典群のより高次のホモトピー群を求める事もできる。が、完全に決定するためには S^n のホモトピー群の分類が完了する必要があるので、中々困難のようだ。