

「期待値」（期待できる利益）

さて、ゲームを考える中で、戦略を確率的に選ぶというのは自然な考えである。「確率」についての単元は数Aで詳しくやるので、そちらを履修してください。ただ、今はそんな専門的な確率は必要ではなく、あたりが2本入った5本のくじの中で、一本引いて当たる確率は2/5であることを理解してくればそれでいい。

さて、では期待値のお話。簡単に言えば、期待値とは一回の行動の価値、あるいは利益の平均と言うことである。例えば、当たり外れ1本ずつ、つまり1/2で当たり外れのくじで、当たると100円、外れると0円だとすると、このくじ一本あたりの価値は50円であると言うことは、感覚で理解できるだろう。また、賞金の平均値も50円である。

では次に、賞金はそのままであたりが2本、はずれが8本の場合ではどうだろうか。少し考えれば、わかるだろうがはずれが多くなったので、このくじの価値は上の場合よりも低下したはずである。どれぐらいになったかと言うと、賞金の総額は200円で合計10本のくじなのだから、一本あたりは20円の価値があるわけだ。

別の方法で計算してみよう。当たりの確率は2/10で賞金は100円、はずれは8/10で賞金は0円なので、 $100 \times 2/10 + 0 \times 8/10 = 20$ という具合に利益と確率をかけて足し算しても求まる。

つまり、自分が宝くじを売る立場になったとき、一本あたりのくじの値段を決めることを想像して欲しい。

（例）

	賞金	本数	確率
1等	100円	1本	1/10
2等	50円	2本	2/10
3等	20円	3本	3/10
4等	10円	4本	4/10
合計	300円	10本	1

このくじの1本あたりの価値は、賞金の総額が300円で10本あるから、1本あたり30円の価値がある。別の方法で計算すれば、 $100 \times 1/10 + 50 \times 2/10 + 20 \times 3/10 + 10 \times 4/10 = 10+10+6+4=30$ つまり、宝くじを売るとしたらこのくじは1本30円以上で売らなければならないわけである。

これが期待値と呼ばれるものだ。期待値は利益と確率をかけたものの和で求まる。つまり、

利益	X_1	X_2	X_3	X_n
確率	P_1	P_2	P_3	P_n

のとき、期待値は、 $X_1P_1+X_2P_2+X_3P_3+\cdots+X_nP_n$ で求められる。

（例）サイコロを一回振るとき、出る目の期待値を求めよ。

目の数	確率
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

であるので、期待値は、 $1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + 6 \times 1/6 = 21/6=3.5$

これより、出る目の期待値は3.5である。

問(1) 次の50本の宝くじについて次のような賞金が決まっているとき、くじ一本を引くときの期待値を求めよ。

	1等	2等	3等	はずれ
賞金	1000円	500円	100円	0円
本数	2本	5本	10本	33本

問(2) 1,4,4,5,5,5の数字の書かれたカードから一枚選ぶとき、書かれている数字の期待値を求めよ。

さて、二つの選択肢がある場合、確率も絡んでくれば期待値と言うのは判断の決め手になる。
今、1本の値段の同じくじがA,Bが2種類ある。その配当については以下の通りである。

A	賞金	本数	確率
1等	1000円	1本	1/50
2等	500円	2本	2/50
はずれ	0円	47本	47/50

B	賞金	本数	確率
1等	200円	5本	5/40
2等	80円	10本	10/40
はずれ	0円	25本	25/40

このくじを見る限り、Aの方が賞金は高いが当たる確率は低そうである。逆にBの方は賞金は低いとAと比べると当たりやすい。さしずめ、サマージャンボ宝くじとミニロトといった感じである。
では一体どちらを買うべきなのだろうか？判断の基準としては期待値の大小である。

Aのくじを一回引く期待値を求めてみよう。

$$1000 \times 1/50 + 500 \times 2/50 + 0 \times 47/50 = 20 + 20 = 40$$

Bのくじを一回引く期待値は、

$$200 \times 5/40 + 80 \times 10/40 + 0 \times 25/40 = 25 + 20 = 45$$

と言うわけで、この場合でいけばBを選ぶべきなのである。

(問) 次のくじで期待値の高いほうはどちらか答えよ。

A	賞金	本数	確率
1等	10000円	2本	2/100
2等	5000円	5本	5/100
3等	1000円	8本	8/100
はずれ	0円	85本	35/100

B	賞金	本数	確率
1等	5000円	5本	5/50
2等	2000円	7本	7/50
3等	1000円	10本	10/50
はずれ	0円	28本	28/50

