では位相空間のホモロジー群と spectral 列の関連について見ていこう。

Definition 0.0.1

位相空間対 (X, A) の filter$\{X_s\}$ とは、X の部分空間の列、

$$\cdots \subset X_{-2} \subset X_{-1} = A \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots$$

であり、$\bigcup X_s = X$ を満たし、さらに任意の X の compact 集合 K に対し、$s \in \mathbf{Z}$ が存在し、$K \subset X_s$ を満たすときのことを言う。

Remmark 0.0.2

位相空間対 (X, A) の filter$\{X_s\}$ が与えられたとき、

$$\mathrm{colim}\ i_\sharp : \mathrm{colim}\ S_*(X_s, A) \cong S_*(X, A)$$

であり、

$$\mathrm{colim}\ i_* : \mathrm{colim}\ H_*(X_s, A) \cong H_*(X, A)$$

である。

Definition 0.0.3

位相空間対 (X, A) の filter$\{X_s\}$ が与えられたとき、

$$F_s S_*(X, A; M) = S_*(X_s, A; M)$$

で定義する。これは $S_*(X, A; M)$ の強完備な filter である。

Theorem 0.0.4

位相空間対 (X, A) の filter$\{X_s\}$ が与えられたとき、

$$E^1_{s,t} = H_{s+t}(X_s, X_{s-1}; M)\ ,\ E^\infty_{s,t} = GH_*(X, A; M)$$

となる収束する spectral 列 $\{E^r, d^r\}$ が存在する。

proof)　　$F_s S_*(X, A; M)$ は強完備な filter であり、

$$GF_s S_*(X, A; M) = S_*(X_s, A; M)/S_*(X_{s-1}, A; M) = S_*(X_s, X_{s-1}; M)$$

であるため、前節の定理を用いれば導かれる。

□

上の定理による収束spectral列をfilter$\{X_s\}$に付随する(X,A)のhomology spectral列と呼び、$E^r_{**}(X,A;M)$と書く。

同様にコホモロジー群においても以下のようにspectral列を定義する。

Definition 0.0.5

(X,A)のfilter$\{X_s\}$に対し、$S^n(X,A;M)=\mathrm{Hom}(S_{-n}(X,A),M)$とおき、$S^*(X,A;M)$のfilterを、

$$j:(X_{s-1},A)\hookrightarrow(X,A)$$

を用いて、

$$F_{-s}S^*(X,A;M)=\mathrm{Ker}\ [\ j^\sharp:S^*(X,A;M)\longrightarrow S^*(X_{s-1},A;M)\ ]$$

で定義する。

Remmark 0.0.6

$S^*(X,A;M)$のfilter $F_{-s}S^*(X,A;M)$は完備である。

proof)

$$\begin{aligned}\bigcap F_{-s}S^*(X,A;M)&=\bigcap\mathrm{Ker}\ [\ j^\sharp:S^*(X,A;M)\longrightarrow S^*(X_{s-1},A;M)\ ]\\&=\mathrm{Ker}\ [\ S^*(X,A;M)\ {}^1\!\!\longrightarrow S^*(X,A;M)\ ]\\&=0\end{aligned}$$

□

残念ながらこのfilterは強完備とまでは一般にいえない。

Remmark 0.0.7

$F_{-s}S^*(X,A;M)\cong S^*(X,X_{s-1};M)$である。

proof)　(X,X_{s-1},A)の特異chain複体の短完全列、

$$0\longrightarrow S_*(X_{s-1},A)\longrightarrow S_*(X,A)\longrightarrow S_*(X,X_{s-1})\longrightarrow 0$$

で Hom(; M) をとれば、

$$0 \longrightarrow S^*(X, X_{s-1}; M) \longrightarrow S^*(X, A; M) \longrightarrow S^*(X_{s-1}, A; M)$$

が完全である。よって、

$$F_{-s}S^*(X, A; M) \cong S^*(X, X_{s-1}; M)$$

が成り立つ。

□

Corollary 0.0.8

$GS^*(X, A; M)_{-s,*} \cong S^*(X_s, X_{s-1}; M)$

Definition 0.0.9

$S^*(X, A; M)$ の filter $F_{-s}S^*(X, A; M)$ に付随する spectral 列 E^r_{**} 考えるとき、$E_r^{p,q} = E^r_{-p,-q}$ で表し、微分 d^r を

$$d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+r,t-r+1}$$

で表す。このとき、

$$E_1^{s,t} = E^1_{-s,-t} = H_{-s-t}(GS^*(X, A; M)) \cong H_{-s-t}(S^*(X_s, X_{s-1}; M)) = H^{s+t}(X_s, X_{s-1}; M)$$

であり、$H^*(X, A; M)$ の部分群を、

$$F^sH^*(X, A; M) = \mathrm{Ker}\ [\ j^* : H^*(X, A; M) \longrightarrow H^*(X_{s-1}, A; M)\ ]$$

で定義する。これは $H^*(X, A; M)$ の減少フィルターで

$$H^*(X, X_{s-1}; M) \xrightarrow{i^*} H^*(X, A; M) \xrightarrow{j^*} H^*(X_{s-1}, A; M)$$

の完全列があるので、

$$F_sH^{s+t}(X, A; M) = \mathrm{Im} i^* = \mathrm{Im}[H_{-s-t}(F_{-s}S^*(X, A; M)) \longrightarrow H_{-s-t}(S^*(X, A; M))]$$

なので、$F_sH^{s+t}(X, A; M) = F_{-s}H_{-s-t}(S^*(X, A; M))$ となる。2 重加群

$$GH^*(X, A; M)^{s,t} = F^sH^{s+t}(X, A; M)/F^{s+1}H^{s+t}(X, A; M)$$

と定義する。

$$\begin{aligned} E_\infty^{s,t} &= E^\infty_{-s,-t} = GH_*(S^*(X,A;M))_{-s,-t} \\ &= F_{-s}H_{-s-t}(S^*(X,A;M))/F_{-s+1}H_{-s-t}(S^*(X,A;M)) \\ &= F^sH^{s+t}(X,A;M)/F^{s+1}H^{s+t}(X,A;M) \\ &= GH^*(X,A;M)^{s,t} \end{aligned}$$

この spectral 列を filter$\{X_s\}$ に付随する spectral 列する (X,A) のコホモロジースペクトル列 $\{E_r^{**}(X,A;M)\}$ であらわす。

Definition 0.0.10

空間対 (X,A) の filter$\{X_s\}$ に対し、任意の $s \in \mathbf{Z}$ に対し、(X,X_s) が s-connected となるとき、これを連結な filter であるという。

Lemma 0.0.11

空間対 (X,A) の連結な filter$\{X_s\}$ が与えられている。このとき、$t > s$ に対し、(X_t,X_s) は s-connected である。

proof) (X,X_t,X_s) のホモトピー完全列を考えれば、$\pi_n(X_t,X_s)=0 \quad (n \leqq s)$ である。

□

Proposition 0.0.12

空間対 (X,A) の連結な filter$\{X_s\}$ が与えられている。ホモロジーとコホモロジーのスペクトル列 $\{E^r_{**}\}$ と $\{E_r^{**}\}$ において、$s<0$ あるいは $t<0$ で $E^r_{s,t}=E_r^{s,t}=0$ となる。

proof) $E^1_{s,t}=H_{s+t}(X_s,X_{s-1};M)$ であるが、仮定より (X_s,X_{s-1}) は $(s-1)$-connected になり、$n \leqq s-1$ に対し $\pi_n(X_s,X_{s-1})=0$ である。Hurewiz 定理と普遍係数定理により、$n \leqq s-1$ に対し $H_n(X_s,X_{s-1};M)=0$ である。よって、$t<0$ のとき $E^1_{s,t}=0$ である。また、$s<0$ のとき、$X_s=X_{s-1}=A$ で $E^1_{s,t}=0$ である事もわかる。これより、ホモロジースペクトル列の構成を思い出せば、

$$Z^0 \subset Z^1 \subset \cdots Z^r \subset \cdots \subset B^r \cdots \subset B^1 \subset B^0$$

の空間列において、$E^{r+1} = Z^r/B^r$ だったので $E^1_{s,t} = Z^0_{s,t}/B^0_{s,t} = 0$ という事は $Z^0_{s,t} = B^0_{s,t}$ なので、$Z^r_{s,t} = B^r_{s,t}$ ということで、$E^r_{s,t} = 0$ である。

コホモロジーに対しても、普遍係数定理から $n \leqq s-1$ に対し $H^n(X_s, X_{s-1}; M) = 0$ であるから同様の結果を得る。

$\square$

Proposition 0.0.13

空間対 (X, A) の連結な filter$\{X_s\}$ が与えられているとする。ホモロジーとコホモロジーのスペクトル列 $\{E^r_{**}\}$ と $\{E^{**}_r\}$ は強収束する。

proof) $E^r_{s+t,s-r+1} \longrightarrow E^r_{s,t} \longrightarrow E^r_{s-r,s+r-1}$ を考えれば、Prop 0.0.12 から十分大きな r に対して $E^r_{s+t,s-r+1} = E^r_{s-r,s+r-1} = 0$ になるため、$d^r_{s,t} = 0$ で $\mathrm{Ker} d^r = E^r_{s,t}$ なのだから収束スペクトルであるし、$\mathrm{Im} d^r_{s+t,s-r+1} = 0$ だから、$E^r_{s,t} \cong E^{r+1}_{s,t}$ となり強収束である。

$\square$

Proposition 0.0.14

空間対 (X, A) の連結な filter$\{X_s\}$ が与えられているとする。ホモロジーとコホモロジーのスペクトル列 $\{E^r_{**}\}$ と $\{E^{**}_r\}$ において、$H_*(X, A; M)$ および $H^*(X, A; M)$ の filter は強完備である。

proof) $F_s H_*(X, A; M)_t = \mathrm{Im}[H_t(X_s, A; M) \longrightarrow H_t(X, A; M)]$ なので $s < 0$ に対しては $F_s H_*(X, A; M) = 0$ なので強完備である。一方コホモロジーでは、

$$F^s H^*(X, A; M)_t = \mathrm{Ker}\ [\ j^* : H^t(X, A; M) \longrightarrow H^t(X_{s-1}, A; M)\ ]$$

なので、

$$H^t(X, X_{s-1}; M) \xrightarrow{i^*} H^t(X, A; M) \xrightarrow{j^*} H^t(X_{s-1}, A; M)$$

の完全列があり、十分大きな s に対し仮定により $H^t(X, X_{s-1}; M) = 0$ なので、

$$F_s H_*(X, A; M)_t = \mathrm{Ker} j^* = \mathrm{Im} i^* = 0$$

により強完備である。

$\square$

spectral sequence の一番簡単な例は CW 複体である。大体今までの流れは CW 複体でのホモロジー群を求めたとき、cellular chain のホモロジーの操作とよく似ている。

Definition 0.0.15

CW 複体対 (X,A) には自然と skelton による filter が存在する。つまり、$X_s = \overline{X}^{(s)}$ で定義すればこれは filter となる。これを skelton filter と呼ぶ。$(X,\overline{X}^{(s)})$ は s-connected なのでこれは連結な filter である。

Theorem 0.0.16

CW 複体対 (X,A) においてその skelton filter に付随するホモロジースペクトル列 $\{E^r_{**}\}$ を考えたとき、$t \neq 0$ のとき、$E^r_{s,t} = 0$ であり、$t = 0$ のとき、

$$E^2_{s,0} \cong E^3_{s,0} \cong \cdots \cong E^r_{s,0} \cong E^{r+1}_{s,0} \cong \cdots \cong E^\infty_{s,0} \cong H_*(X,A;M)$$

proof) $E^1_{s,t}(X,A;M) \cong H_{s+t}(X_s,X_{s-1};M)$ であったので、

$$H_{s+t}(X_s,X_{s-1};M) \cong \widetilde{H}_{s+t}(X_s/X_{s-1};M) \cong \widetilde{H}_{s+t}(\vee S^s;M)$$

であるため $t \neq 0$ ならば、$E^1_{s,t}(X,A;M) = 0$。よって、ホモロジースペクトル列の構成を思い出せば、

$$Z^0 \supset Z^1 \supset \cdots \supset Z^r \supset \cdots \supset B^r \supset B^1 \supset B^0$$

の加群の列に対して、$E^r = Z^{r-1}/B^{r-1}$ と定義したわけである。今、$t \neq 0$ に対し $E^1_{s,t} = Z^0_{s,t}/B^0_{s,t} = 0$ なので $Z^0_{s,t} = B^0_{s,t}$ である。よって列の最初と最後が等しいので任意の r に対し、$Z^r_{s,t} = B^r_{s,t}$ である。これより $E^r_{s,t} = 0$ 次に $r \geqq 2$ のとき、

$$E^r_{s+r,-r+1} \xrightarrow{d^r} E^r_{s,0} \xrightarrow{d^r} E^r_{s-r,r-1}$$

で $E^r_{s+r,-r+1} = E^r_{s-r,r-1} = 0$ であるため、

$$E^r_{s,0} = H_{s,0}(E^r) \cong E^{r+1}_{s,0}$$

である。よって、

$$E^2_{s,0} \cong E^3_{s,0} \cong \cdots \cong E^r_{s,0} \cong E^{r+1}_{s,0} \cong \cdots \cong E^\infty_{s,0}$$

また、$E^\infty_{s,0} = GH_*(X,A;M)_{s,0}$ であった。

$GH_*(X,A;M)_{s,0} = \mathrm{Im}[H_s(X_s,A;M) \longrightarrow H_s(X,A;M)]/\mathrm{Im}[H_s(X_{s-1},A;M) \longrightarrow H_s(X,A;M)]$

である。ところで cellular chain を思い出せば、$H_s(X_{s-1}, A; M) = 0$ である。filter が連結なので、$H_s(X, X_s; M) = 0$ であり、

$$H_s(X_s, A; M) \longrightarrow H_s(X, A; M) \longrightarrow H_s(X, X_s; M)$$

の完全列があるため、$H_s(X_s, A; M) \longrightarrow H_s(X, A; M)$ が全射となり、$GH_*(X, A; M)_{s,0} = H_s(X, A; M)$ となる。

□

という事で skelton filter のホモロジースペクトラル列であと残るは $E^1_{s,0}$ だけであるが、$E^1_{s,0} = H_s(X_s, X_{s-1}; M)$ であり、$d^1 : E^1_{s,0} \longrightarrow E^1_{s-1,0}$ は、3 対 (X_s, X_{s-1}, X_{s-2}) の boundary $\partial : H_s(X_s, X_{s-1}; M) \longrightarrow H_{s-1}(X_{s-1}, X_{s-2}; M)$ と一致する。このため、$E^2_{s,0} \cong H_s(X, A; M)$ なのだから、スペクトル列の構成を思い出せば、

$$E^2_{s,0} = Z^1_{s,0}/B^1_{s,0} = \mathrm{Ker}\partial/\mathrm{Im}\partial$$

なので、この求め方は cellular chain のホモロジー群と singular chain のホモロジー群が一致する事を表している。

これにより CW 複体における cellular chain の構成とそこから $H_*(X, A; M)$ を求める手法がホモロジースペクトル列の構成の一部であることがわかる。

もっと言えば、(X, A) において $X_n = \phi\ (n < -1), X_{-1} = A, X_n = X\ (n > -1)$ で filter を定義してそのスペクトル列を考えれば (X, A) の対のホモロジー完全列を考えられるし、(X, A, B) において、$X_n = B\ (n < 0), X_0 = A, X_n = X\ (n > 0)$ と filter を定義してスペクトル列を考えると、この 3 対のホモロジー完全列が導かれる。

(X, A) の完全列、(X, A, B) の完全列があることから自然と 4 対 (X, A, B, C) や 5 対においても完全列のようなものを考案したくなる。その答えの 1 つがスペクトル列である。