0.1 Cores

$\mathcal{D}$ を T-structure の $(\mathcal{D}^{\geqq 0}, \mathcal{D}^{\leqq 0})$ を持つ triangulated category としたとき、$\mathcal{A} = \mathcal{D}^{\geqq 0} \cap \mathcal{D}^{\leqq 0}$ が core であるが、これについて考える。

Lemma 0.1.1

$\mathcal{D}$ を t-structure をもつ triangulated category とする。

$$X \in \mathcal{D}^{\leqq n-1} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \qquad ({}^{\forall} Y \in \mathcal{D}^{\geqq n})$$

であり、

$$W \in \mathcal{D}^{\geqq n} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, W) = 0 \qquad ({}^{\forall} Z \in \mathcal{D}^{\leqq n-1})$$

である。

proof)　最初の命題を示す。$\Longrightarrow$ は $X \in \mathcal{D}^{\leqq n-1}$, $Y \in \mathcal{D}^{\geqq n}$ に対し、

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}((X[n-1])[-n+1], (Y[n-1])[-n+1]) \cong \mathrm{Hom}(X[n-1], Y[n-1]) = 0$$

であるのは、$X[n-1] \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$, $Y[n-1] \in \mathcal{D}^{\geqq 1}$ だからである。逆を示す。$X \in \mathcal{D}$ に対し、t-structure の定義から、

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

が triangle で $A \in \mathcal{D}^{\leqq n-1}$, $B \in \mathcal{D}^{\geqq n}$ となるものが存在する。本来なら $\mathcal{D}^{\leqq 0}$, $\mathcal{D}^{\geqq 1}$ の object として存在するが、$X[n-1]$ でそのように分解して $[-n+1]$ で shift すれば良い。このとき、$\mathrm{Hom}(-, B)$ を施すと、

$$\mathrm{Hom}(A, B) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, B) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A[1], B) = 0$$

が exact であるので、$\mathrm{Hom}(B, B) = 0$。つまり、$B \cong 0$ である。よって、

$$A \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow A[1]$$

が triangle ということは、$\mathrm{Hom}(X, -)$ と $\mathrm{Hom}(-, A)$ を考えれば $A \cong X$ であることが分かるので、$X \in \mathcal{D}^{\leqq n-1}$

$\square$

Corollary 0.1.2

任意の n, m に対し、$0 \in \mathcal{D}^{\leqq n}$ であり、$0 \in \mathcal{D}^{\geqq m}$ である。

proof)　0 が inicial かつ terminal であることを踏まえると Lemma 0.1.1 により示される。

$\square$

Lemma 0.1.3

$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$ を triangle とする。

1. $X, Z \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n}$ ならば、$Y \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n}$
2. $X \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n+1}$ で、$Y \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n}$ ならば、$Z \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n}$
3. $Y \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n}$ で、$Z \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n-1}$ ならば、$X \in \mathcal{D}^{\leqq(\geqq)n}$

proof)　(1) の $\leqq$ の場合を示す。$X, Z \in \mathcal{D}^{\leqq n}$ とする。Lemma 0.1.1 により、$Y \in \mathcal{D}^{\leqq n}$ ということは、任意の $W \in \mathcal{D}^{\geqq n+1}$ に対し $\mathrm{Hom}(Y, W) = 0$ という条件と同値である。というわけで、$\mathrm{Hom}(-, W)$ を取ると、

$$\mathrm{Hom}(Z, W) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, W) = 0$$

が exact なので、$\mathrm{Hom}(Y, W) = 0$。また、$\geqq$ の場合は逆に任意の $W \in \mathcal{D}^{\leqq n-1}$ に対し、$\mathrm{Hom}(W, -)$ を取ればよい。

(2)、(3) は shift すれば (1) に帰着できる。

$\square$

Lemma 0.1.4

$0 : X \longrightarrow Y$ に対し、triangle

$$X \xrightarrow{0} Y \xrightarrow{i} C_0 \longrightarrow X[1]$$

を考えたとき、$r : C_0 \longrightarrow Y$ が存在し、$r \circ i = 1_Y$ を満たす。つまり、Y は C_0 の retract である。

proof)　$\mathrm{Hom}(-, Y)$ を取ると、

$$\mathrm{Hom}(X[1], Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_0, Y) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(Y, Y) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}(X, Y)$$

が exact であるので、i^* は全射である。このとき、$1_Y \in \mathrm{Hom}(Y, Y)$ に対し、${}^{\exists} r \in \mathrm{Hom}(C_0, Y)$　s.t　$i^*(r) = r \circ i = 1_Y$ である。

$\square$

Theorem 0.1.5

T-structure を持つ任意の triangulated category の core は abelian catgeory である。

proof)　まず $\mathcal{A}$ は full subcategory なので $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ が abelian group で誘導される morphism が準同型になることは良い。また、Cor 0.1.2 により、$0 \in \mathcal{A}$ も確かめられる。

finite product と coproduct で閉じているかは、$A, B \in \mathcal{A}$ に対し、

$$A \longrightarrow A \oplus B \ (A \times B) \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

は A, B に関する自明な triangle の直和、直積なので triangle である。このとき、$A, B \in \mathcal{A}$ なので、$A \oplus B$, $A \times B \in \mathcal{A}$ である。この議論を拡張すれば finite product と coproduct で閉じている事がわかる。

そして、Kernel と Cokernel についてであるが、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ に対し、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} C_f \xrightarrow{h} X[1] \cdots\cdots$$

という triangle が unique up to isomorphic で存在するが、このとき、

$$\tau_{\leqq -1}C_f \xrightarrow{\alpha} C_f \xrightarrow{\beta} \tau_{\geqq 0}C_f \longrightarrow \tau_{\leqq -1}C_f[1] \cdots\cdots$$

という triangle も unique up to isomorphic で存在する。このとき、

$$\mathrm{Ker}f = \tau_{\leqq -1}C_f[-1] \xrightarrow{(h\circ\alpha)[-1]} X \xrightarrow{f} Y$$

が Kernel であり、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta\circ g} \tau_{\geqq 0}C_f = \mathrm{Coker}f$$

が Cokernel である。では、Cokernel についてそれを確かめてみる。$\mathrm{Coker}f = \tau_{\geqq 0}C_f$ であるので、$\mathrm{Coker}f \in \mathcal{D}^{\geqq 0}$ であることはよい。また、Lemma 0.1.3 により、$X \in \mathcal{D}^{\leqq 0} \subset \mathcal{D}^{\leqq 1}$, $Y \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ なのだから、　の triangle から $C_f \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ である。そして、$\tau_{\leqq -1}C_f \in \mathcal{D}^{\leqq -1} \subset \mathcal{D}^{\leqq 1}$ を踏まえれば、　の triangle から $\mathrm{Coker}f \in \mathcal{D}^{\leqq 0}$ が言えて、まずは $\mathrm{Coker}f \in \mathcal{A}$ であることが分かる。では、次に coeqaulizar になっているかを

確かめよう。$h : Y \longrightarrow Z$ で $h \circ f = 0$ となる $\mathcal{A}$ の morphism を考える。このとき、octahedral axiom により、

$$\begin{tikzcd}
& C_0 \arrow[dr, dotted, "v"] \arrow[ddl] & \\
C_f \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[d] & & C_h \arrow[ll, dotted, "{[1]}"'] \arrow[ddl] \\
X \arrow[rr, "g", "0"'] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[u] \arrow[uul, "i"] \\
& Y \arrow[ur, "h"'] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}$$

このとき、Lemma 0.1.4 により、$i : Z \longrightarrow C_0$ は retraction、$r : C_0 \longrightarrow Z$ をもつ。つまり、$r \circ i = 1_Z$ である。このとき、

$$r \circ u \circ g = r \circ i \circ h = h$$

である。よって、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq -1} C_f \arrow[r, "\alpha"] & C_f \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "r \circ u"'] & \tau_{\geqq 0} C_f \arrow[r] & \tau_{\leqq -1} C_f[1] \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "="'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

の図式で上下は triangle であり、$\tau_{\leqq -1} C_f \in \mathcal{D}^{\leqq -1}$ で $Z \in \leqq \mathcal{D}^{\geqq 0}$ であるので、上の図式でジグザグにたどる morphism は 0 である。さらに、$\mathrm{Hom}(\tau_{\leqq -1} C_f, Z[-1]) = 0$ でもあるので、

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqq -1} C_f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"'] & C_f \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "r \circ u"'] & \tau_{\geqq 0} C_f \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi"'] & \tau_{\leqq -1} C_f[1] \arrow[d, "0"'] \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "="'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\varphi : \tau_{\geqq 0}C_f \longrightarrow Z$ が一意に存在する。（注：φ を構成するために定義した morphism らも一意に定まるので、φ はそれらに依存しない。）これより、

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="'] & C_f \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "r \circ u"'] & \tau_{\geqq 0}C_f \arrow[d, "\varphi"'] \\
Y \arrow[r, "h"'] & Z \arrow[r, "="'] & Z
\end{tikzcd}$$

が可換なので、外側を見れば coequalizar になっていることが示される。Kernel も同様である。

最後に準同型定理についてであるが、$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\mathrm{Ker}f \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}f$$

の sequence を考えたとき、

$$\begin{tikzcd}
 & C_j \arrow[dr, dotted, "v=p"] \arrow[ddl] & \\
\mathrm{Coker}f[-1] = \tau_{\geqq 0}C_f[-1] \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[d] & & Y \arrow[ll, dotted, "{[1]}"'] \arrow[ddl] \\
\mathrm{Ker}f = \tau_{\leqq -1}C_f \arrow[rr, "j"'] \arrow[dr] & & X \arrow[u, "f"'] \arrow[uul] \\
 & C_f[-1] \arrow[uul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

から、

$$\mathrm{Coker}f[-1] \longrightarrow C_j \longrightarrow Y \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}f$$

が triangle である。一方、

$$\mathrm{Coker}f[-1] \longrightarrow C_p[-1] \longrightarrow Y \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}f$$

という triangle もあるため、$C_j \cong C_p[-1]$ である。これより、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
 & C_f \arrow[ddl] \arrow[dr, dotted, "v"] & \\
\mathrm{Ker}f[1] \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[d] & & \mathrm{Coker}f \arrow[ll, dotted, "[1]"'] \arrow[ddl] \\
X \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr] & & Y \arrow[u, "f"'] \arrow[uul] \\
 & C_j \cong C_p[-1] \arrow[uul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

の octahedral axiom が適用できる。$f = j$ とおけば、j が monomorphism より、$\mathrm{Ker}j = 0$。よって、$C_j \cong \mathrm{Coker}j$ である。逆に $f = p$ とおけば、p は epimorphism だから、$\mathrm{Coker}p = 0$。よって、$\mathrm{Ker}p[1] \cong C_p$

以上より、

$$\mathrm{Ker}p \cong C_p[-1] \cong C_j \cong \mathrm{Coker}j$$

となり、この対応はちょうど準同型定理の morphism になっている。

$\square$