

0.1 Cores

\mathcal{D} を T -structure の $(\mathcal{D}^{\geq 0}, \mathcal{D}^{\leq 0})$ を持つ triangulated category としたとき、 $\mathcal{A} = \mathcal{D}^{\geq 0} \cap \mathcal{D}^{\leq 0}$ が core であるが、これについて考える。

Lemma 0.1.1

\mathcal{D} を t-structure をもつ triangulated category とする。

$$X \in \mathcal{D}^{\leq n-1} \iff \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0 \quad (\forall Y \in \mathcal{D}^{\geq n})$$

であり、

$$W \in \mathcal{D}^{\geq n} \iff \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, W) = 0 \quad (\forall Z \in \mathcal{D}^{\leq n-1})$$

である。

proof) 最初の命題を示す。 \implies は $X \in \mathcal{D}^{\leq n-1}$, $Y \in \mathcal{D}^{\geq n}$ に対し、

$$\text{Hom}(X, Y) \cong \text{Hom}((X[n-1])[-n+1], (Y[n-1])[-n+1]) \cong \text{Hom}(X[n-1], Y[n-1]) = 0$$

であるのは、 $X[n-1] \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $Y[n-1] \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ だからである。逆を示す。 $X \in \mathcal{D}$ に対し、t-structure の定義から、

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

が triangle で $A \in \mathcal{D}^{\leq n-1}$, $B \in \mathcal{D}^{\geq n}$ となるものが存在する。本来なら $\mathcal{D}^{\leq 0}$, $\mathcal{D}^{\geq 1}$ の object として存在するが、 $X[n-1]$ でそのように分解して $[-n+1]$ で shift すれば良い。このとき、 $\text{Hom}(-, B)$ を施すと、

$$\text{Hom}(A, B) = 0 \longrightarrow \text{Hom}(X, B) = 0 \longrightarrow \text{Hom}(B, B) \longrightarrow \text{Hom}(A[1], B) = 0$$

が exact であるので、 $\text{Hom}(B, B) = 0$ 。つまり、 $B \cong 0$ である。よって、

$$A \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow A[1]$$

が triangle ということは、 $\text{Hom}(X, -)$ と $\text{Hom}(-, A)$ を考えれば $A \cong X$ であることが分かるので、 $X \in \mathcal{D}^{\leq n-1}$

Corollary 0.1.2

任意の n, m に対し、 $0 \in \mathcal{D}^{\leq n}$ であり、 $0 \in \mathcal{D}^{\geq m}$ である。

proof) 0 が inicial かつ terminal であることを踏まえると Lemma 0.1.1 により示される。

Lemma 0.1.3

$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ を triangle とする。

1. $X, Z \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$ ならば、 $Y \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$
2. $X \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n+1}$ で、 $Y \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$ ならば、 $Z \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$
3. $Y \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$ で、 $Z \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n-1}$ ならば、 $X \in \mathcal{D}^{\leq(\geq)n}$

proof) (1) の \leq の場合を示す。 $X, Z \in \mathcal{D}^{\leq n}$ とする。 Lemma 0.1.1 により、 $Y \in \mathcal{D}^{\leq n}$ ということは、任意の $W \in \mathcal{D}^{\geq n+1}$ に対し $\text{Hom}(Y, W) = 0$ という条件と同値である。というわけで、 $\text{Hom}(-, W)$ を取ると、

$$\text{Hom}(Z, W) = 0 \rightarrow \text{Hom}(Y, W) \rightarrow \text{Hom}(X, W) = 0$$

が exact なので、 $\text{Hom}(Y, W) = 0$ 。また、 \geq の場合は逆に任意の $W \in \mathcal{D}^{\leq n-1}$ に対し、 $\text{Hom}(W, -)$ を取ればよい。

(2)、(3) は shift すれば (1) に帰着できる。

Lemma 0.1.4

$0: X \rightarrow Y$ に対し、triangle

$$X \xrightarrow{0} Y \xrightarrow{i} C_0 \rightarrow X[1]$$

を考えたとき、 $r: C_0 \rightarrow Y$ が存在し、 $r \circ i = 1_Y$ を満たす。つまり、 Y は C_0 の retract である。

proof) $\text{Hom}(-, Y)$ を取ると、

$$\text{Hom}(X[1], Y) \rightarrow \text{Hom}(C_0, Y) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(Y, Y) \xrightarrow{0} \text{Hom}(X, Y)$$

が exact であるので、 i^* は全射である。このとき、 $1_Y \in \text{Hom}(Y, Y)$ に対し、 $\exists r \in \text{Hom}(C_0, Y)$ s.t. $i^*(r) = r \circ i = 1_Y$ である。

Theorem 0.1.5

T -structure を持つ任意の triangulated category の core は abelian category である。

proof) まず \mathcal{A} は full subcategory なので $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ が abelian group で誘導される morphism が準同型になることは良い。また、Cor 0.1.2 により、 $0 \in \mathcal{A}$ も確かめられる。

finite product と coproduct で閉じているかは、 $A, B \in \mathcal{A}$ に対し、

$$A \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

は A, B に関する自明な triangle の直和、直積なので triangle である。このとき、 $A, B \in \mathcal{A}$ なので、 $A \oplus B, A \times B \in \mathcal{A}$ である。この議論を拡張すれば finite product と coproduct で閉じている事がわかる。

そして、Kernel と Cokernel についてであるが、 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対し、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} C_f \xrightarrow{h} X[1] \cdots \cdots$$

という triangle が unique up to isomorphic で存在するが、このとき、

$$\tau_{\leq -1} C_f \xrightarrow{\alpha} C_f \xrightarrow{\beta} \tau_{\geq 0} C_f \longrightarrow \tau_{\leq -1} C_f[1] \cdots \cdots$$

という triangle も unique up to isomorphic で存在する。このとき、

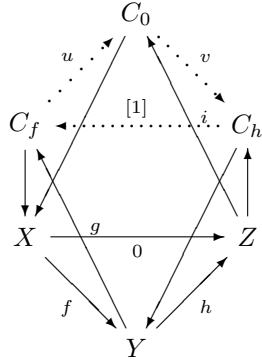
$$\text{Ker } f = \tau_{\leq -1} C_f[-1] \xrightarrow{(h \circ \alpha)[-1]} X \xrightarrow{f} Y$$

が Kernel であり、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta \circ g} \tau_{\geq 0} C_f = \text{Coker } f$$

が Cokernel である。では、Cokernel についてそれを確かめてみる。Coker $f = \tau_{\geq 0} C_f$ であるので、Coker $f \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ であることはよい。また、Lemma 0.1.3 により、 $X \in \mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$, $Y \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ なのだから、この triangle から $C_f \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ である。そして、 $\tau_{\leq -1} C_f \in \mathcal{D}^{\leq -1} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$ を踏まえれば、この triangle から Coker $f \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ が言えて、まずは Coker $f \in \mathcal{A}$ であることが分かる。では、次に coequalizer になっているかを

確かめよう。 $h : Y \rightarrow Z$ で $h \circ f = 0$ となる A の morphism を考える。このとき、octahedral axiom により、



このとき、Lemma 0.1.4 により、 $i : Z \rightarrow C_0$ は retraction、 $r : C_0 \rightarrow Z$ をもつ。つまり、 $r \circ i = 1_Z$ である。このとき、

$$r \circ u \circ g = r \circ i \circ h = h$$

である。よって、

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\leq -1} C_f & \xrightarrow{\alpha} & C_f & \xrightarrow{\beta} & \tau_{\geq 0} C_f & \longrightarrow & \tau_{\leq -1} C_f[1] \\ & & \downarrow rou & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{=} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

の図式で上下は triangle であり、 $\tau_{\leq -1} C_f \in \mathcal{D}^{\leq -1}$ で $Z \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ であるので、上の図式でジグザグにたどる morphism は 0 である。さらに、 $\text{Hom}(\tau_{\leq -1} C_f, Z[-1]) = 0$ でもあるので、

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_{\leq -1} C_f & \xrightarrow{\alpha} & C_f & \xrightarrow{\beta} & \tau_{\geq 0} C_f & \longrightarrow & \tau_{\leq -1} C_f[1] \\ \downarrow 0 & & \downarrow rou & & \downarrow \varphi & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{=} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を可換にする $\varphi : \tau_{\geq 0}C_f \rightarrow Z$ が一意に存在する。(注: φ を構成するために定義した morphism とも一意に定まるので、 φ はそれらに依存しない。) これより、

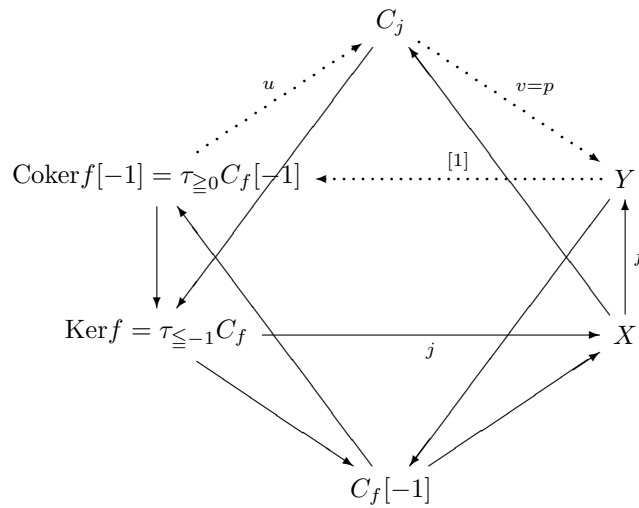
$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{g} & C_f & \xrightarrow{\beta} & \tau_{\geq 0}C_f \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 = & & \text{rou} & & \\
 Y & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{=} & Z
 \end{array}$$

が可換なので、外側を見れば coequalizar になっていることが示される。Kernel も同様である。

最後に準同型定理についてであるが、 $f : X \rightarrow Y$ に対し、

$$\text{Ker } f \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} \text{Coker } f$$

の sequence を考えたとき、



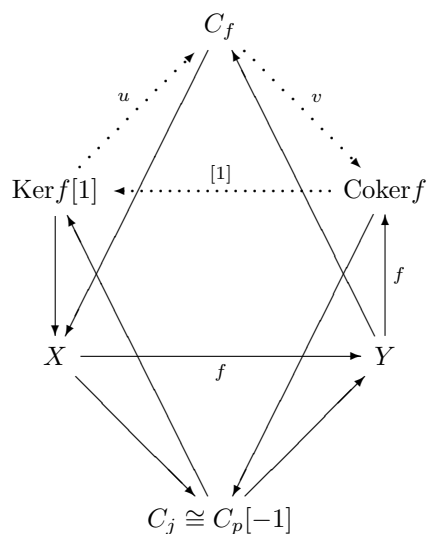
から、

$$\text{Coker } f[-1] \rightarrow C_j \rightarrow Y \xrightarrow{p} \text{Coker } f$$

が triangle である。一方、

$$\text{Coker } f[-1] \rightarrow C_p[-1] \rightarrow Y \xrightarrow{p} \text{Coker } f$$

という triangle もあるため、 $C_j \cong C_p[-1]$ である。これより、 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ に対し、



の octahedral axiom が適用できる。 $f = j$ とおけば、 j が monomorphism より、 $\text{Ker } j = 0$ 。よって、 $C_j \cong \text{Coker } j$ である。逆に $f = p$ とおけば、 p は epimorphism だから、 $\text{Coker } p = 0$ 。よって、 $\text{Ker } p[1] \cong C_p$

以上より、

$$\text{Ker } p \cong C_p[-1] \cong C_j \cong \text{Coker } j$$

となり、この対応はちょうど準同型定理の morphism になっている。