0.1 T-structure

Definition 0.1.1

$(\mathcal{D},[1])$ を triangulated categiry としたとき、その t-structure とは、$\mathcal{D}$ の 2 つの strictly full sub category である $(\mathcal{D}^{\geqq 0},\mathcal{D}^{\leqq 0})$ で次の条件を満たすものである。

1. $\mathcal{D}^{\geqq n}=\mathcal{D}^{\geqq 0}[-n]$, $\mathcal{D}^{\leqq n}=\mathcal{D}^{\leqq 0}[-n]$ とかくとき、full subcategory という意味で、

$$\mathcal{D}^{\geqq 1}\subset\mathcal{D}^{\geqq 0}\quad,\quad\mathcal{D}^{\leqq 0}\subset\mathcal{D}^{\leqq 1}$$

   つまり、$\mathcal{D}^{\geqq 0}$ is closed under Σ^{-1} and $\mathcal{D}^{\leqq 0}$ is closed under Σ

2. 任意の $X\in\mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$, $Y\in\mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ に対し、$\mathrm{Hom}(X,Y)=0$

3. 任意の $X\in\mathrm{ob}(\mathcal{D})$ に対し、

$$A\longrightarrow X\longrightarrow B\longrightarrow A[1]$$

   という distingulish triangle が存在するような $A\in\mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$ と $B\in\mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ が存在する。

このとき、$\mathcal{D}$ の full subcategory である $\mathcal{A}=\mathcal{D}^{\geqq 0}\cap\mathcal{D}^{\leqq 0}$ を $\mathcal{D}$ の t-structure の core、あるいは heart と呼ぶ。

Lemma 0.1.2

次の図式、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

において上下は triangle とし、$v'\circ g\circ u=0$ とする。このとき、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, dotted, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"'] & X[1] \arrow[d, dotted, "{f[1]}"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

を可換にするような f,h が存在する。また、$\mathrm{Hom}(X,Z'[-1])=0$ のとき、このような f,h は一意に決まる。

proof)　　$\mathrm{Hom}(X,-)$ を取ると、

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(X,X) & \xrightarrow{u_*} & \mathrm{Hom}(X,Y) & \xrightarrow{v_*} & \mathrm{Hom}(X,Z) \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \\
\mathrm{Hom}(X,X') & \xrightarrow[u'_*]{} & \mathrm{Hom}(X,Y') & \xrightarrow[v'_*]{} & \mathrm{Hom}(X,Z')
\end{array}$$

で、上下は exact になり $1\in\mathrm{Hom}(X,X)$ に対し、仮定から

$$v'_*\circ g_*\circ u_*(1)=v'_*(g\circ u)=0$$

であるので、$^\exists f\in\mathrm{Hom}(X,X')$　s.t　$u'_*(f)=g\circ u$ というわけで、f が存在し公理から h も存在する。

ではさらに、$\mathrm{Hom}(X,Z'[-1])=0$ とすると、

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{Hom}(X,X) & \xrightarrow{u_*} & \mathrm{Hom}(X,Y) & \xrightarrow{v_*} & \mathrm{Hom}(X,Z) \\
 & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle g_*} & & \\
\mathrm{Hom}(X,Z[-1])=0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,X') & \xrightarrow[u'_*]{} & \mathrm{Hom}(X,Y') & \xrightarrow[v'_*]{} & \mathrm{Hom}(X,Z')
\end{array}$$

と完全列は続き、u'_* は単射であるので、f の存在は一意に決まる。一方、$\mathrm{Hom}(X[1],Z')\cong\mathrm{Hom}(X,Z'[-1])=0$ でもあるので、$\mathrm{Hom}(-,Z')$ を施して考えれば、h の存在の一意性も同様に確認できる。

$\square$

Lemma 0.1.3

$\mathcal{D}^{\leqq n}\longrightarrow\mathcal{D}$ を inclusion としたとき、この right adjoint

$$\tau_{\leqq n}:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}^{\leqq n}$$

が存在する。また、$\mathcal{D}^{\geqq n}\longrightarrow\mathcal{D}$ を inclusion としたとき、この left adjoint

$$\tau_{\geqq n}:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}^{\leqq n}$$

が存在する。

proof) $\tau_{\leqq 0}$ および、$\tau_{\geqq 1}$ を定義すればあとは shift によって定めることができる。$X \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ に対し、t-structure の定義により

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

という triangle が存在し、$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$, $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ である。この triangle は unique up to isomorphic である。なぜなら、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "="'] & B \arrow[r, "w"] & A[1] \\
A' \arrow[r, "u'"'] & X \arrow[r, "v'"'] & B' \arrow[r, "w'"'] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

を２つの triangle として $A, A' \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$, $B, B' \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ としたとき、$\mathrm{Hom}(A, B'[-1]) = 0$ というのは t-structure の定義から分かる。よって Lemma 0.1.1 により、triangle の morphism が一意に定まり、上下を入れ替えてもやはり一意に morphism が定まるので triangle の同型となる。よって、$\tau_{\leqq 0}(X) = A$, $\tau_{\geqq 1}(X) = B$ により定義する。また $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "w"] & A[1] \\
A' \arrow[r, "u'"'] & Y \arrow[r, "v'"'] & B' \arrow[r, "w'"'] & A'[1]
\end{tikzcd}$$

の図式で Lemma 0.1.1 により、$A \longrightarrow A'$、$B \longrightarrow B'$ は一意に定まるので、それを

$$\tau_{\leqq 0}(f) : A \longrightarrow A' \ , \ \tau_{\geqq 1}(f) : B \longrightarrow B'$$

と定義すれば、$\tau_{\leqq 0}$, $\tau_{\geqq 1}$ は functor である。

最後に、inclusion との adjoint を見る。$X \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0}), Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ に対し、

$$\tau_{\leqq 0}(Y) \xrightarrow{u} Y \longrightarrow \tau_{\geqq 1}(Y) \longrightarrow \tau_{\leqq 0}(Y)[1]$$

という triangle があるので、 $\mathrm{Hom}(X, -)$ を取れば、

$$\mathrm{Hom}(X, \tau_{\geqq 1}(Y)[-1]) = 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \tau_{\leqq 0}(Y)) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, \tau_{\geqq 1}(Y)) = 0$$

が完全なので、

$$u_* : \mathrm{Hom}(X, \tau_{\leqq 0}(Y)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(X, Y)$$

ということで、

$$\text{inclusion} : \mathcal{D}^{\leqq 0} \Longleftrightarrow \mathcal{D} : \tau_{\leqq 0}$$

$\tau_{\geqq 1}$ も同様である。

$\square$

Example 0.1.4

$\mathcal{A}$ を abelian category としたとき、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ の t-structure を

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})^{\leqq 0(\geqq 0)} = \{X \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid H^n(X) = 0, n > 0(n < 0)\}$$

により定義する。このとき、core は $\mathcal{A}$ である。

proof)　(1) 条件は良いと思う。(2) を示していく。$X \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$, $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ とする。このとき、$f/s : X \longrightarrow Y$ を考える。ただし $X \xrightarrow{f} K \xleftarrow{s} Y$ で s は quasi isomorphism である。$f = 0$ を示せばよい。

さて、$X \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$ なので、$m > 0$ に対し $H^m(X) = 0$ である。つまり、

$$X : \cdots \longrightarrow X^{m-1} \xrightarrow{d^{m-1}} X^m \xrightarrow{d^m} X^{m+1} \longrightarrow \cdots$$

は $m > 0$ で exact になっているわけである。これより、

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d, "="'] & X^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "="'] & \mathrm{Im} d^0 \arrow[r] \arrow[d, "\cap"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] & X^0 \arrow[r, "d^0"] & X^1 \arrow[r, "d^1"] & X^2 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

の可換図で homology 群を取れば同型を誘導するため、これは quasi isomorphism である。つまり、X は $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 内では上列と思ってよい。$Y \sim K$ であるので、$K \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ である。よって $m < 1$ に対し、$H^m(K) = 0$ ということは、K は

$$\cdots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Im} d^0 \hookrightarrow K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

と思ってよい。$f : X \longrightarrow K$ は

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d_X^{-1}"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & X^0 \arrow[r, "d_X^0"] \arrow[d, "f^0"'] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"'] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"'] & {} \\
\arrow[r] & K^{-1} \arrow[r, "d_K^{-1}"] & K^0 \arrow[r, "d_K^0"] & K^1 \arrow[r, "d_K^1"] & K^2 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

であるが、これを書き換えると、

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & X^{-1} \arrow[r, "d_X^{-1}"] \arrow[d] & X^0 \arrow[r, "d_X^0"] \arrow[d, "d_K^0 \circ f^0"'] & \mathrm{Im} d_X^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im} d_K^0 \arrow[r, "\subset"] & K^1 \arrow[r, "d_K^1"] & K^2 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

の chain map が null homotopic、つまり 0 と chain homotopic でであればよい。これは、chain homotopy

$$f_1 : \mathrm{Im} d_X^0 \longrightarrow \mathrm{Im} d_K^0$$

が構成できるので示せる。よって、$\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$

最後に (3) であるが、$X \in \mathrm{ob}(X)$ に対し、

$$A = \cdots \longrightarrow X^{-1} \longrightarrow X^0 \longrightarrow \mathrm{Im} d^0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$B = \cdots 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Im} d^0 \hookrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots$$

と定義すれば、$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\leqq 0})$ で $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{D}^{\geqq 1})$ である。$j : A \longrightarrow X$ を inclusion とすれば、

$$A \xrightarrow{j} X \longrightarrow C(j) \longrightarrow A[1]$$

という triangle が存在する。ここで、$C(j) = \{A[1] \oplus X\ ,\ (-d[1], j + d)\}$ であった。これより、$B \sim C(j)$ ならば $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 内で置き換えて問題ないため、題意が示される。

$$A[1] \oplus X = \cdots X^0 \oplus X^{-1} \longrightarrow \mathrm{Im} d^0 \oplus X^0 \longrightarrow X^1 \longrightarrow X^2 \longrightarrow \cdots$$

であり、

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & X^0 \oplus X^{-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im} d^0 \oplus X^0 \arrow[r] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "="'] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "="'] & {} \\
\arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Im} d^0 \arrow[r] & X^1 \arrow[r] & X^2 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

の図式で、

$$f : C(j) \longrightarrow B \ \ , \ \ g : B \longrightarrow C(j)$$

をそれぞれ、$f^0 : \mathrm{Im}d^0 \oplus X^0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^0$ を $f^0(x,y) = x + d(y)$ で、$g^0 : \mathrm{Im}d^0 \longrightarrow \mathrm{Im}d^0 \oplus X^0$ を $g^0(a) = (a,0)$ により定義すると、上の図式を可換にするので f,g は chain map である。このとき、$f \circ g = 1$ である。最後に $g \circ f \simeq 1$ を示そう。chain homotpy

$$H : C(j)[1] \longrightarrow C(j)$$

を $H^m(x,y) = (-y,0) \quad (m < 0)$, $H^m = 0 \quad (m \geqq 0)$ により定義する。$m > 0$ では明らかに $g \circ f \overset{H}{\simeq} 1$ となっており、$m < 0$ においては、$g \circ f = 0$ であり、$(x,y) \in C(j)^m = X^{m+1} \oplus X^m$ に対し、

$$H \circ d(x,y) + d \circ H(x,y) = H(-d(x), x+d(y)) + d(-y,0) = (-x-d(y),0) + (d(y),-y) = (-x,-y)$$

であるため良い。残るは $m = 0$ の時だが、同じように $(x,y) \in \mathrm{Im}d^0 \oplus X^0$ のとき、

$$H \circ d(x,y) + d \circ H(x,y) = d(-y,0) = (d(y),-y) = (x+d(y),0) - (x,y) = g \circ f(x,y) - (x,y)$$

であり、$g \circ f \sim 1$ である。これより、

$$A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow A[1]$$

という triangle が存在する。

□

Example 0.1.5

$\mathcal{S}$ を category of spectra としたとき、そのホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(\mathcal{S}) = \mathcal{D}$ に対し、$\mathcal{D}$ の t-structure を

$$\mathcal{D}^{\leqq 0(\geqq 0)} = \{X \in \mathcal{D} \mid \pi_n(X) = 0, n > 0(n < 0)\}$$

により定義し、postnikov t-structure と呼ぶ。