0.1 Abelian category

Definition 0.1.1

$\mathcal{A}$ を category としたとき、次の条件を満たすとき Abelian category と呼ぶ。

1. 任意の $\mathcal{A}$ の object である X, Y に対し、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ はアーベル群となり、$f : Y \longrightarrow Z$, $g : W \longrightarrow X$ に対し、$f_* : \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Z)$, $g^* : \mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(W, Y)$ は準同型となる。

2. $\mathcal{A}$ は inicial object かつ terminal object である $0 \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ を持つ。

3. 任意の $\mathcal{A}$ の object である X, Y に対し、small coproduct と product が存在する。

   ここまでの条件で $\mathcal{A}$ を Additive category と呼ぶ。Abelian category は最後にもう 2 つの条件を加えたものである。単純に言うと任意の morphism に対し Ker と Coker が存在し、準同型定理が成り立つということなのだが、それを category の言葉で言うとかなり面倒。本来一般の catgeory でも morphism の kernel、cokernel というのは定義できるのだが（存在するかは知らないが）Additive category の場合は次のようにそれらを定義してもよい。

4. $f : X \longrightarrow Y$ に対し、$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(-, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(-, Y)\right) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ を表現する object である $\mathrm{Ker}f$ が存在する。つまり、任意の $Z \in ob(\mathcal{A})$ に対し、natural な同型

   $$\mathrm{Hom}(Z, \mathrm{Ker}f) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, Y)\right)$$

   が存在することである。

   そして双対的に、$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Y, -) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(X, -)\right) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ を表現する object である $\mathrm{Coker}f$ が存在する。つまり、任意の $Z \in ob(\mathcal{A})$ に対し、natural な同型

   $$\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}f, Z) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Z)\right)$$

   が存在することである。

5. $f : X \longrightarrow Y$ に対し、4 の条件から、$\mathrm{Hom}(Z, \mathrm{Ker}f) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Z, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, Y)\right)$ なので、右の Kernel はアーベル群としての Kernel なので inclusion を合成すれば $\mathrm{Hom}(Z, \mathrm{Ker}f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, X)$ という morphism が得られる。ここで

$Z = \mathrm{Ker}f$ とおくと、$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}f, \mathrm{Ker}f) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}f, X)$ であり、恒等射の像を $i \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}f, X)$ とおく。同様にして、$p \in \mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Coker}f)$ が得られる。

さらに同様な手順を i と p に対し行うと、$j \in \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}i)$ と $q \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}p, Y)$ が得られる。図式に描くと、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}f \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[r, "p"] & \mathrm{Coker} \\
& \mathrm{Coker}i & \mathrm{Ker}p \arrow[u, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

という状況である。このとき、群などでは当然ではあるが、$p \circ f = 0$ である。なぜなら、

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}f, \mathrm{Coker}f) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Coker}f) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}f)\right)$$

の同型で $1 \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}f, \mathrm{Coker}f)$ に対応するのが p であった。正確には、

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}f, \mathrm{Coker}f) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Coker}f) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}f)\right) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Coker}f)$$

であるので、$p \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Coker}f) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}f)\right)$ であるので、$f_*(p) = p \circ f = 0$ となる。これより、

$$\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Ker}p) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}f)\right)$$

の同型で $f \in \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}f)\right)$ に対応する元を、$g \in \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Ker}p)$ とおく。自然性から、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Ker}p) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i^*"'] & \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Coker}f)\right) \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}f, \mathrm{Ker}p) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}f, Y) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}f, \mathrm{Coker}f)\right)
\end{tikzcd}$$

であるので対応を見ると、$g \circ i = 0$ であることが分かる。ここから同じくして、$h : \mathrm{Coker}i \longrightarrow \mathrm{Ker}p$ が定義できる。見やすいように $\mathrm{Coker}i = \mathrm{Coim}f$, $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}f$ といておく。（群で考えればこれは当たり前なのだが）つまり、

$$h : \mathrm{Coim}f \longrightarrow \mathrm{Im}f$$

が定義される。最後の条件はこれが同型になるというものである。

Definition 0.1.2

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を addtive category 間の fanctor としたとき、これが additive fanctor であるとは、任意の $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ に対し、morphism の対応、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

が準同型であることである。

以後で abelian category における (co)homology を定義する。アーベル群などでは chain complex において $H_*(A) = \mathrm{Ker}\partial/\mathrm{Im}\partial$ と商群を用いて定義した。しかし category では商は取られないので、どうするかという問題がある。

Definition 0.1.3

$\mathcal{A}$ を abelian category としたとき、

$$Ch(\mathcal{A}) = \{\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \to \cdots | A_j \in \mathcal{A}, \partial_j \circ \partial_{j+1} = 0, j \in \mathbf{Z}\}$$

で定義する。また boundary と可換になる $\mathcal{A}$ の morphism の族、つまり chain map を morphism として、$Ch(\mathcal{A})$ は category となる。もっと言えば、$Ch(\mathcal{A})$ も abelian category である。

このとき、$\partial_j \circ \partial_{j+1} = 0$ であるので、

$$\partial'_{j+1} : A_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\partial_j$$

が定まる。よって、$\mathrm{Coker}(\partial'_{j+1}) = H_j(A)$ と定義する。このとき、chain map である $f : A_* \longrightarrow B_*$ から、

$$f_* : H_*(A) \longrightarrow H_*(B)$$

がやはり定義に従って導くことができる。これより、

$$H_* : Ch(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

が共変関手として定義できる。また $Co(\mathcal{A}) = Ch(\mathcal{A})^{op}$ で考えれば、cohomology が定義できる。