0.1 Derived fanctor and Model category

abelian category における derived category や derived fanctor は Model category における Homotopy category や Quillen の意味での derived fanctor とどういった関連があるのか考えたとき、それは R-module における (co)chain complex の category である Ch_R , $\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ を思い出せばよい。ただし、そのためには abelian category である $\mathcal{A}$ に対し、$\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ $\mathrm{Co}(A)$ にも Ch_R と同じ model stracture の morphism 指定で model category になって欲しい。とりあえず、どういう状況の時にそうなるのかはさておき、ここでは $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ は Ch_R と同じ morphism 指定で model category になるとする。このとき、injective replacement というのは fibrant replacement に他ならない。

Theorem 0.1.1

$\mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A})) \cong \mathcal{D}(\mathcal{A})$

proof)　　各 object は一致しているので、morphism の集合の同型を示せばよい。$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A}))}(A^*, B^*)$ の morphism は $\pi(RQA^*, RQB^*)$ で、すべての object は cofibrant なので Q を取る意味はなく、$\pi(RA^*, RB^*)$ と考えられる。また π は homotopy 類であるが、$\mathrm{Co}(\mathcal{A})$ においては chain homotopy 類である。

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(A))}(A^*, B^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$$

を、$f^* : RA^* \longrightarrow RB^*$ に対し、次のように定義する。$t^* : A^* \longrightarrow RA^*$ と $s^* : B^* \longrightarrow RB^*$ をそれぞれ fibrant replacement とする。このとき、$\alpha(f^*) = f^* \circ t^*/s^*$ で定義する。inverce は次のように定義する。

$$\beta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(A))}(A^*, B^*)$$

を、$\varphi = f_*/s^* : A^* \longrightarrow B^*$ に対し、$t^* : A^* \longrightarrow RA^*$ を fibrant replacement とすれば、$RA^* \overset{t^*}{\longleftarrow} A^* \overset{f^*}{\longrightarrow} RB^*$ の push out を C^* とすれば、fibrant replacement をとれば C^* は fibrant と仮定してよい。$K(\mathcal{A})$ 内で、

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[drr, "f^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\
RA^* \arrow[dr, "g^*"'] & & RB^* \arrow[dl, "u^*"] \\
& C^* &
\end{tikzcd}$$

$u^* : RB^* \longrightarrow C^*$ は fibrant かつ cofibrant 間の weak equivalence なので chain homotopy equivalence である。つまり $K(\mathcal{A})$ 内では isomorphism である。この inverce を $v^* : C^* \longrightarrow RB^*$ とする。よって、$v^* \circ g^* : RA^* \longrightarrow RB^*$ が定義でき、$\beta(\varphi) = v^* \circ g^*$ とすればよい。面倒だが、合成してきちんと恒等射になっているかどうかも確かめてみよう。

$\varphi = f^*/s^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$ としたとき、$\alpha \circ \beta(\varphi) = \alpha(v^* \circ g^*)$ であるが、

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[rrd, "f^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\
RA^* \arrow[rd, "g^*"'] & & RB^* \arrow[ld, shift left, "u^*"] \\
& C^* \arrow[ru, shift left, "v^*"] &
\end{tikzcd}
$$

の可換図式を考えれば、$\alpha(v^* \circ g^*) = v^* \circ g^* \circ t^*/s^* = f^*/s^* = \varphi$ である。よって、$\alpha \circ \beta = 1$。

逆がなかなか面倒である。まず、$f^* : RA^* \longrightarrow RB^*$ を考えたとき、$\beta \circ \alpha(f^*) = \beta(f^* \circ t^*/s^*)$ であるが、これは何に成るかというと図式を考えれば、

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[rrd, "f^* \circ t^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\
RA^* \arrow[rd, "g^*"'] & & RB^* \arrow[ld, "u^*"] \\
& C^* &
\end{tikzcd}
$$

ここで C^* は $RA^* \overset{t^*}{\longleftarrow} A^* \overset{f^* \circ t^*}{\longrightarrow} RB^*$ の push out である。この C^* の fibrant replacement で取り替え、そこへ向かう morphism の商で表されるが $\beta(v^* \circ t^*)$ である。理

想はその replacement が RB^* でしかも、

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[drr, "f^*\circ t^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\
RA^* \arrow[dr, "f^*"'] & & RB^* \arrow[dl, "1"] \\
& RB^* &
\end{tikzcd}$$

という状況になってくれることである。これなら、$\beta(v^* \circ t^*) = f^*$ になる。では、こうなることを示そう。

ひとつ疑問なのは、push out の時点での $RA^* \overset{t^*}{\longleftarrow} A^* \overset{f^*\circ t^*}{\longrightarrow} RB^*$ で双方とも t^* が入っているのだから、これを除いて、$RA^* \overset{1}{\longleftarrow} RA^* \overset{f^*}{\longrightarrow} RB^*$ の push out を考えたとき、これは文句なく RB^* である。しかしこれが元と図式の push out と一致している、……というのは一般には成り立たない。部分的な図式の colimit と元の図式の colimit は一般的には違う。ただし quasi isomorphic は言える。今の場合、焦点になっている t^* が quasi isomorphism というのが大きな役割を果たしている。colimit は fanctor なので、

$$(RA^* \overset{t^*}{\longleftarrow} A^* \overset{f^*\circ t^*}{\longrightarrow} RB^*) \longrightarrow (RA^* \overset{1}{\longleftarrow} RA^* \overset{f^*}{\longrightarrow} RB^*)$$

という natural transformation が t^*と恒等射 で定義される。よって、

$$C^* = \mathrm{colim}(RA^* \overset{t^*}{\longleftarrow} A^* \overset{f^*\circ t^*}{\longrightarrow} RB^*) \longrightarrow \mathrm{colim}(RA^* \overset{1}{\longleftarrow} RA^* \overset{f^*}{\longrightarrow} RB^*) = RB^*$$

が導かれるが、これは homology 群を取ってみれば、homology と colimit が可換ということ、加えて張り合わせ部分の $H(t^*) : H^*(A) \longrightarrow H^*(RA)$ は同型であるので、$H^*(C) \longrightarrow H^*(RB)$ が同型であることが分かる。よって、元の $C^* \longrightarrow RB^*$ は quasi isomorphism であり、RB^* は injective object からなるので、C^* を RB^* に取り替えられる。しかも取り替えたときの morphism の変化はうまく、

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[drr, "f^*\circ t^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\
RA^* \arrow[dr, "f^*"'] & & RB^* \arrow[dl, "1"] \\
& RB^* &
\end{tikzcd}$$

となってくれる。よって、$\beta \circ \alpha = 1$

$\square$

Remmark 0.1.2

$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ を abelian category 間の左完全加法的関手とする。このとき、F は fibrant object 間の weak equivalence を weak equivalence に移すことが分かっているので、Quillen の意味での derived fanctor が存在する。その構成法は $F \circ R : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$ からの誘導であった。これは $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ における derived fanctor

$$\mathbf{R}F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

を考えたとき、

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A})) \arrow[r, "\mathbf{R}F"] \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] & \mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A})) \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathbf{R}F"'] & \mathcal{D}(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

が可換性はどうなのかという疑問がある。まず考えるべきは object の遷移をみると、$A^* \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(A))$ を取ったときに、Quillen の意味での $\mathbf{R}F$ で移す際の fibrant replacement である RA^* と、同型で $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ に行き（この時の object に変化はない)、Abelian category における derived fanctor の $\mathbf{R}F$ で移す際の fibrant replacement が一致するのか？という疑問がある。chain homotopy 同値であることは分かっているので、$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 内では isomorphic ではあるが真に可換という場合には障害となる。つまり言えても up to isomorphic ぐらいである。

morphism の移動を見てみると、$f^* : RA^* \longrightarrow RB^* \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A}))}(A^*, B^*)$ をとると、

$$\mathbf{R}F \circ \alpha(f^*) = \mathbf{R}F(f^* \circ t^*/s^*)$$

図式に描くと、

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[dr, "f^* \circ t^*"] & B^* \arrow[d, "s^*"] \\ RA^* & RB^* \end{tikzcd}$$

であり、先ほどの Theorem から、下の図式の push out として、

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[d, "t^*"'] \arrow[drr, "f^* \circ t^*"] & & B^* \arrow[d, "s^*"] \\
RA^* \arrow[dr, "f^*"'] & & RB^* \arrow[dl, "1"] \\
& RB^* &
\end{tikzcd}$$

を取って問題なかった。これを F で移して、商を取る。つまり、

$$\mathbf{R}F(f^* \circ t^*/s^*) = F(f^*)/1$$

である。一方、$\alpha \circ \mathbf{R}F(f^*) = \alpha(RF(f^*))$ となり、

$$\begin{tikzcd}
FRA^* \arrow[r, "F(f^*)"] \arrow[d, "s^*"'] & FRB^* \arrow[d, "t^*"] \\
RFRA^* \arrow[r, "RF(f^*)"'] & RFRB^*
\end{tikzcd}$$

が可換となる。よって、

$$\begin{tikzcd}
FRA^* \arrow[d, "F(f^*)"'] \arrow[drr, "RF(f^*) \circ t^*"] & & FRB^* \arrow[d, "s^*"] \arrow[dll, "1"'] \\
RFB^* \arrow[dr, "s^*"'] & & RFRB^* \arrow[dl, "1"] \\
& RFRB^* &
\end{tikzcd}$$

が可換なので、

$$\alpha(RF(f^*)) = RF(f^*) \circ t^*/s^* = F(f^*)/1$$

よって、$\mathbf{R}F \circ \alpha(f^*) = \alpha \circ \mathbf{R}F(f^*)$ となり、最初の図式は commutive up to isomorphic である。