

0.1 Derived functor and Model category

abelian category における derived category や derived functor は Model category における Homotopy category や Quillen の意味での derived functor とどういった関連があるのか考えたとき、それは R -module における (co)chain complex の category である Ch_R , $\text{Co}(\mathcal{A})$ を思い出せばよい。ただし、そのためには abelian category である \mathcal{A} に対し、 $\text{Ch}(\mathcal{A})$, $\text{Co}(\mathcal{A})$ にも Ch_R と同じ model structure の morphism 指定で model category になって欲しい。とりあえず、どういう状況の時にそうなるのかはさておき、ここでは $\text{Ch}(\mathcal{A})$, $\text{Co}(\mathcal{A})$ は Ch_R と同じ morphism 指定で model category になるとする。このとき、injective replacement というのは fibrant replacement に他ならない。

Theorem 0.1.1

$$\text{Ho}(\text{Co}(\mathcal{A})) \cong \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

proof) 各 object は一致しているので、morphism の集合の同型を示せばよい。 $\text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Co}(\mathcal{A}))}(A^*, B^*)$ の morphism は $\pi(RQA^*, RQB^*)$ で、すべての object は cofibrant なので Q を取る意味はなく、 $\pi(RA^*, RB^*)$ と考えられる。また π は homotopy 類であるが、 $\text{Co}(\mathcal{A})$ においては chain homotopy 類である。

$$\alpha : \text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Co}(\mathcal{A}))}(A^*, B^*) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$$

を、 $f^* : RA^* \longrightarrow RB^*$ に対し、次のように定義する。 $t^* : A^* \longrightarrow RA^*$ と $s^* : B^* \longrightarrow RB^*$ をそれぞれ fibrant replacement とする。このとき、 $\alpha(f^*) = f^* \circ t^* / s^*$ で定義する。inverse は次のように定義する。

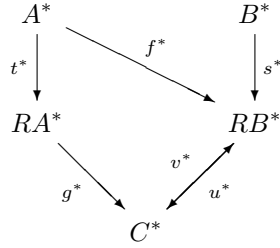
$$\beta : \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Ho}(\text{Co}(\mathcal{A}))}(A^*, B^*)$$

を、 $\varphi = f^* / s^* : A^* \longrightarrow B^*$ に対し、 $t^* : A^* \longrightarrow RA^*$ を fibrant replacement とすれば、 $RA^* \xleftarrow{t^*} A^* \xrightarrow{f^*} RB^*$ の push out を C^* とすれば、fibrant replacement をとれば C^* は fibrant と仮定してよい。 $K(\mathcal{A})$ 内で、

$$\begin{array}{ccc}
 A^* & & B^* \\
 \downarrow t^* & \searrow f^* & \downarrow s^* \\
 RA^* & & RB^* \\
 & \searrow g^* & \swarrow u^* \\
 & C^* &
 \end{array}$$

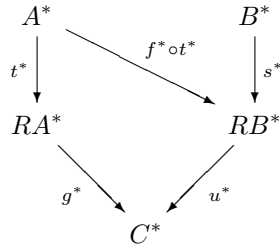
$u^* : RB^* \rightarrow C^*$ は fibrant かつ cofibrant 間の weak equivalence なので chain homotopy equivalence である。つまり $K(\mathcal{A})$ 内では isomorphism である。この inverse を $v^* : C^* \rightarrow RB^*$ とする。よって、 $v^* \circ g^* : RA^* \rightarrow RB^*$ が定義でき、 $\beta(\varphi) = v^* \circ g^*$ とすればよい。面倒だが、合成してきちんと恒等射になっているのかも確かめてみよう。

$\varphi = f^*/s^* \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^*, B^*)$ としたとき、 $\alpha \circ \beta(\varphi) = \alpha(v^* \circ g^*)$ であるが、



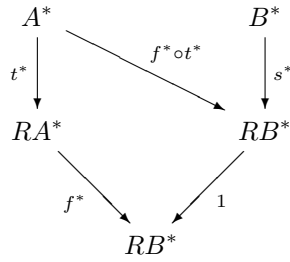
の可換図式を考えれば、 $\alpha(v^* \circ g^*) = v^* \circ g^* \circ t^*/s^* = f^*/s^* = \varphi$ である。よって、 $\alpha \circ \beta = 1$ 。

逆がなかなか面倒である。まず、 $f^* : RA^* \rightarrow RB^*$ を考えたとき、 $\beta \circ \alpha(f^*) = \beta(f^* \circ t^*/s^*)$ であるが、これは何に成るかという図式を考えれば、



ここで C^* は $RA^* \xleftarrow{t^*} A^* \xrightarrow{f^* \circ t^*} RB^*$ の push out である。この C^* の fibrant replacement で取り替え、そこへ向かう morphism の商で表されるが $\beta(v^* \circ t^*)$ である。理

想はその replacement が RB^* でしかも、



という状況になってくれることである。これなら、 $\beta(v^* \circ t^*) = f^*$ になる。では、こうなることを示そう。

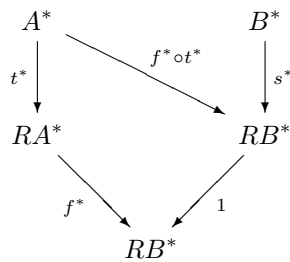
ひとつ疑問なのは、push out の時点での $RA^* \xleftarrow{t^*} A^* \xrightarrow{f^* \circ t^*} RB^*$ で双方とも t^* が入っているのだから、これを除いて、 $RA^* \xleftarrow{1} RA^* \xrightarrow{f^*} RB^*$ の push out を考えたとき、これは文句なく RB^* である。しかしこれが元と図式の push out と一致している、.....というのは一般には成り立たない。部分的な図式の colimit と元の図式の colimit は一般的には違う。ただし quasi isomorphic は言える。今の場合、焦点になっている t^* が quasi isomorphism というのが大きな役割を果たしている。colimit は functor なので、

$$(RA^* \xleftarrow{t^*} A^* \xrightarrow{f^* \circ t^*} RB^*) \longrightarrow (RA^* \xleftarrow{1} RA^* \xrightarrow{f^*} RB^*)$$

という natural transformation が t^* と恒等射 で定義される。よって、

$$C^* = \text{colim}(RA^* \xleftarrow{t^*} A^* \xrightarrow{f^* \circ t^*} RB^*) \longrightarrow \text{colim}(RA^* \xleftarrow{1} RA^* \xrightarrow{f^*} RB^*) = RB^*$$

が導かれるが、これは homology 群を取ってみれば、homology と colimit が可換ということ、加えて張り合わせ部分の $H(t^*) : H^*(A) \longrightarrow H^*(RA)$ は同型であるので、 $H^*(C) \longrightarrow H^*(RB)$ が同型であることが分かる。よって、元の $C^* \longrightarrow RB^*$ は quasi isomorphism であり、 RB^* は injective object からなるので、 C^* を RB^* に取り替えられる。しかも取り替えたときの morphism の変化はうまく、



となってくれる。よって、 $\beta \circ \alpha = 1$

Remark 0.1.2

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ を abelian category 間の左完全加法的関手とする。このとき、 F は fibrant object 間の weak equivalence を weak equivalence に移すことが分かっているので、Quillen の意味での derived functor が存在する。その構成法は $F \circ R : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$ からの誘導であった。これは $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ における derived functor

$$\mathbf{R}F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

を考えたとき、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A})) & \xrightarrow{\mathbf{R}F} & \mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A})) \\ \cong \downarrow \alpha & & \cong \downarrow \alpha \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathbf{R}F} & \mathcal{D}(\mathcal{B}) \end{array}$$

が可換性はどうなのかという疑問がある。まず考えるべきは object の遷移をみると、 $A^* \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A}))$ を取ったときに、Quillen の意味での $\mathbf{R}F$ で移す際の fibrant replacement である RA^* と、同型で $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ に行き (この時の object に変化はない) Abelian category における derived functor の $\mathbf{R}F$ で移す際の fibrant replacement が一致するのか? という疑問がある。chain homotopy 同値であることは分かっているので、 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 内では isomorphic ではあるが真に可換という場合には障害となる。つまり言えても up to isomorphic ぐらいである。

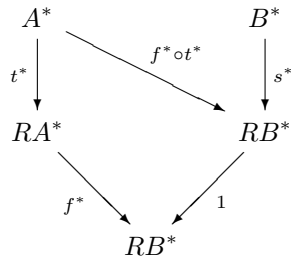
morphism の移動を見てみると、 $f^* : RA^* \rightarrow RB^* \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{Co}(\mathcal{A}))}(A^*, B^*)$ をとると、

$$\mathbf{R}F \circ \alpha(f^*) = \mathbf{R}F(f^* \circ t^*/s^*)$$

図式に描くと、

$$\begin{array}{ccc} A^* & & B^* \\ t^* \downarrow & \searrow f^* \circ t^* & \downarrow s^* \\ RA^* & & RB^* \end{array}$$

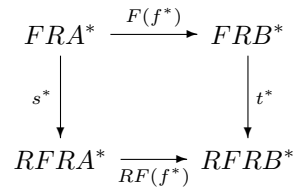
であり、先ほどの Theorem から、下の図式の push out として、



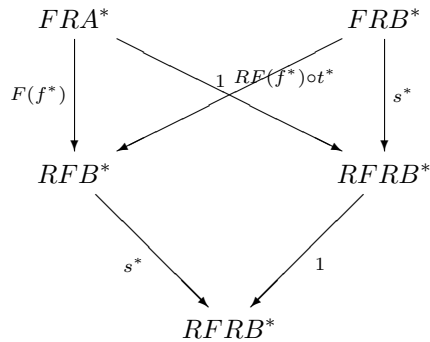
を取って問題なかった。これを F で移して、商を取る。つまり、

$$\mathbf{R}F(f^* \circ t^*/s^*) = F(f^*)/1$$

である。一方、 $\alpha \circ \mathbf{R}F(f^*) = \alpha(\mathbf{R}F(f^*))$ となり、



が可換となる。よって、



が可換なので、

$$\alpha(\mathbf{R}F(f^*)) = \mathbf{R}F(f^*) \circ t^*/s^* = F(f^*)/1$$

よって、 $\mathbf{R}F \circ \alpha(f^*) = \alpha \circ \mathbf{R}F(f^*)$ となり、最初の図式は commutative up to isomorphic である。