0.1 Smash product

Definition 0.1.1

無限次元線形（内積）空間 $U \cong \mathbf{R}^\infty$ を univerce と呼ぶ。E が spectrum とは、各 U の finite dimensional subspace である V に対し、based space である EV と、$V \subset W$ に対し、structure map と呼ばれる連続写像

$$\sigma_{V,W} : \Sigma^{W-V} EV \longrightarrow EW$$

が与えられ、さらにこの adjoint

$$\tilde{\sigma}_{V,W} : EV \longrightarrow \Omega^{W-V} EW$$

が homeo であるときのことをさす。ただし、$\Sigma^X Y = S^X \wedge Y$ であり、S^X は X の一点コンパクト化である。

E, E' を Spectrum としたとき、Spectrum 間の写像とは、

$$\{ f_V : EV \longrightarrow E'V \mid V : \text{finite dimensional subspace of U} \}$$

であり、

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{W-V} EV \arrow[r, "\Sigma^{W-V} f_V"] \arrow[d, "\sigma"'] & \Sigma^{W-V} E'V \arrow[d, "\sigma'"] \\ EW \arrow[r, "f_W"'] & E'W \end{tikzcd}$$

が可換になることである。

Spectrum の category を $\mathscr{S}U$ とかく。つまりここでいう Spectrum というのは通常の Spectrum における Ω-Spectrum しか考えないという事である。ので普通は一般的に考えるので、structure map の adjoint が homeo という条件をはずしたものを、pre-spectrum と呼び、その category を $\mathscr{P}U$ とかく。

Theorem 0.1.2

$\mathscr{S}U \longrightarrow \mathscr{P}U$ を forgetfull functor とすると、この left adjoint が存在する。これを、

$$L : \mathscr{P}U \longrightarrow \mathscr{S}U$$

と書いて spectrification と呼ぶ。

Proposition 0.1.3

$\mathscr{S}U$ および、$\mathscr{P}U$ は bicomplete である。

proof)　　古典的な spectrum での colimit,limit と同様である。

$\square$

Definition 0.1.4

$E \in \mathscr{S}U$ と $X \in \mathbf{TOP}_*$ に対し、V を finite dimensional subspace of U として

$$(E \wedge X)V = EV \wedge X$$

により定義し、structure map を

$$\Sigma^{W-V}(E \wedge X)V = S^{W-V} \wedge EV \wedge X \xrightarrow{\sigma \wedge 1_X} EW \wedge X = (E \wedge X)W$$

により定義すれば、これは homeo は失われしまうため、$E \wedge X \in \mathscr{P}U$ である。しかし、$E \wedge X$ を spectrification を施し spectrum を構成することができるので、この spectrum を再度 $E \wedge X \in \mathscr{S}U$ と書くことにする。このとき、

$$- \wedge - : \mathscr{S}U \times \mathbf{TOP}_* \longrightarrow \mathscr{S}U$$

は bifunctor である。

Definition 0.1.5

Functor である $Ev_V : \mathscr{S}U \longrightarrow \mathbf{TOP}_*$ を $Ev_V(E) = EV$ により定義し、Vth evalustion map と呼ぶ。Kan extension により、この left adojoint が存在するため、これを

$$\mathbf{\Sigma}_V^\infty : \mathbf{TOP}_* \longrightarrow \mathscr{S}U$$

と書くことにし、特に $V = \mathbf{R}^n$ のとき $\mathbf{\Sigma}_n^\infty$、$V = 0$ のとき $\mathbf{\Sigma}^\infty$ とかく。

Definition 0.1.6

$n \geqq 0$ に対し、$\Sigma^\infty S^n$ を S^n と書いて n 次 Sphere Spectrum と呼ぶ。また、$\Sigma_n^\infty S^0 = S^{-n}$ と定義する。

Spectrum の category での homotopy 論も位相空間とは独立に（定義の仕方は真似ただけだが）定義することができる。

Definition 0.1.7

$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}U}(E, E')$ に対し、$f \simeq g$ を

$$^{\exists}H : E \wedge I_+ \longrightarrow E'$$

s.t $H \circ i_0 = f$, $H \circ i_1 = g$ で定義すればこれは $\mathscr{S}U$ の morphism の間の同値関係になる。ただし、

I_+ は $I \cup \{*\}$ であり、$t \in I$ に対し、

$$i_t : E = E \wedge S^0 \xrightarrow{1_E \wedge t} E \wedge I_+$$

である。このとき、f と g は homotopy 同値であるという。

$\mathrm{Ho}\mathscr{S}U$ を object は $\mathscr{S}U$ で morphism を homotopy class により定義した homotopy category とする。

Definition 0.1.8

$E \in \mathscr{S}U$ に対し、

$$\pi_n(E) = \mathrm{Hom}_{h\mathscr{S}U}(S^n, E)$$

で定義し、E の n 次 homotopy group と呼ぶ。$f : E \longrightarrow E'$ を map of spectrum としたとき、準同型

$$f_* : \pi_*(E) \longrightarrow \pi_*(E')$$

が導かれる。f_* が同型の時、f を weak equivalence と定義する。$h\mathscr{S}U$ における weak equivalence の集合を W としたとき、これで局所化した category

$$\mathrm{Ho}^s(\mathscr{S}U) = \mathrm{Ho}\mathscr{S}U[W^{-1}]$$

と書き、stable homotopy category と呼ぶ。