0.1 $\mathbb{L}$-spectra

Remmark 0.1.1

U, U' を univerce とする。

$$\ltimes : \mathbf{TOP} \downarrow (\mathscr{I}'(U, U')) \times \mathscr{S}U \longrightarrow \mathscr{S}U'$$

は preserve homotopy equivalence in each variable.

ただし、**TOP** 上の homotopy equivalence だけでは $\ltimes$ は保ってくれないが、条件をつければこれが成り立つ。

Definition 0.1.2

$D \in \mathscr{P}U$ が Σ-cofibrant とは、その structure map

$$\sigma : \Sigma^{W-V} DV \longrightarrow DW$$

が任意の $V \subset W$ に対し、cofibration of based space であることをさす。

また、$E \in \mathscr{S}U$ が Σ-cofibrant とは、ある Σ-cofibrant な prespectrum の spectrification と同型になることである。さらに $E \in \mathscr{S}U$ が tame とは Σ-cofibrant な spectrum と homotopy equivalence な spectrum と定義する。

Theorem 0.1.3

$E \in \mathscr{S}U$ を tame spectrum とし、

$$\alpha : A \longrightarrow \mathscr{I}(U, U') \ , \ \beta : B \longrightarrow \mathscr{I}(U, U')$$

とし、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{TOP}\downarrow(\mathscr{I}'(U,U'))}(A, B)$ が **TOP** 上の homotopy equivalence のとき、

$$f \ltimes 1 : A \ltimes E \longrightarrow B \ltimes E$$

は homotopy equivalence in $\mathscr{S}U'$

Corollary 0.1.4

$E \in \mathscr{S}U$ は CW spectrum の homotopy type をもち、$A \in \mathbf{TOP} \downarrow (\mathscr{I}'(U, U'))$ で A は CW complex の homotopy type をもつとする。このとき、$A \ltimes E$ は CW spectrum の homotopy type をもつ。

Definition 0.1.5 *linear isometric operad*

$U^j = \oplus_j U$ とし、$\mathscr{L}(j) = \mathscr{I}(U^j, U)$ とすれば、これは U の endomorphism operad と考えられる。これを U の linear isometric operad と呼ぶ。

Definition 0.1.6

$f \in \mathscr{L}(2)$ に対し、inclusion

$$\{f\} \longrightarrow \mathscr{L}(2) = \mathscr{I}(U^2, U)$$

を考えると、$E, E' \in \mathscr{S}U$ に対し、external product の $E \wedge E' \in \mathscr{S}U^2$ を用いて、

$$f_*(E \wedge E') = \{f\} \ltimes (E \wedge E')$$

と書き、internal smash product と呼ぶ。

Definition 0.1.7

$\mathscr{S}_t U$ を $\mathscr{S}U$ の tame spectrum のなす full subcategory とする。$\mathscr{S}U$ と同様に homotopy category を $h\mathscr{S}_t U$、stable homotopy category を $\mathrm{Ho}(\mathscr{S}_t U)$ で定義する。

Lemma 0.1.8

$E, E' \in h\mathscr{S}_t U$、$f \in \mathscr{L}(2)$ に対し、

$$f_*(E \wedge E') \cong \mathscr{L}(2) \ltimes (E \wedge E')$$

ただし、右辺は $1 : \mathscr{L}(2) \longrightarrow \mathscr{L}(2)$ での internal smash product

Theorem 0.1.9

$h\mathscr{S}_t U$ は internal smash product において symmetric monoidal category となる。

Proposition 0.1.10

$X \in \mathbf{TOP}_*$、$E \in h\mathscr{S}_t U$ に対し、there is natural isomorphism $E \wedge X \cong \mathscr{L}(2) \ltimes (E \wedge \Sigma^\infty X)$ in $h\mathscr{S}_t U$

Definition 0.1.11

$\mathscr{S}U$ における monad である $\mathbb{L}:\mathscr{S}U\longrightarrow\mathscr{S}U$ を、$\mathbb{L}E=\mathscr{L}(1)\ltimes E$ で定義し、

$$\mu:\mathbb{L}\mathbb{L}E=\mathscr{L}(1)\ltimes(\mathscr{L}(1)\ltimes E)\cong(\mathscr{L}(1)\times\mathscr{L}(1))\ltimes E\xrightarrow{\gamma\ltimes 1}\mathscr{L}(1)\ltimes E=\mathbb{L}E$$

$$\eta:E\cong\{1\}\ltimes E\longrightarrow\mathscr{L}(1)\ltimes E=\mathbb{L}E$$

ただし、$1\in\mathscr{L}(1)$ は unit object であり、morphism は inclusion から導かれるものとする。

Definition 0.1.12

M が $\mathbb{L}$-spectrum とは、$M\in\mathscr{S}U$ であり、$\mathscr{S}U$ の morphism である $\xi:\mathbb{L}M\longrightarrow M$ が与えられ、次の条件を満たすものである。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}\mathbb{L}M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathbb{L}(\xi)"'] & \mathbb{L}M \arrow[d, "\xi"] \\
\mathbb{L}M \arrow[r, "\xi"'] & M
\end{tikzcd}$$

が可換であり、$1=\xi\circ\eta:M\longrightarrow M$ となる。

また、M,N を $\mathbb{L}$-spectrum としたとき、この間の morphism である $f:M\longrightarrow N$ とは、spectrum 間の morphism であり、次を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}M \arrow[r, "\mathbb{L}f"] \arrow[d, "\xi_M"'] & \mathbb{L}N \arrow[d, "\xi_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{L}$-spectrum の category を $\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ とかく。これは、$\mathscr{S}$ の sub catgeory である。

Proposition 0.1.13

$\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ は bicomplete である。

Proposition 0.1.14

$X\in\mathbf{TOP}_*$ と $M\in\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ に対し、$M\wedge X\in\mathscr{S}[\mathbb{L}]$

Definition 0.1.15

$f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}[\mathbb{L}]}(X,Y)$ に対し、$^{\exists}H : X \wedge I_+ \longrightarrow Y \quad \text{s.t} \quad H \circ i_0 = f\ ,\ H \circ i_1 = g$ のとき、$f \simeq g$ と書いて $\mathbb{L}$-spectrum における homotopic と呼ぶ。この homotopy category を $h\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ と書き、さらに $\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ の weak equivalence を $\mathscr{S}$ における weak equivalence と定義する。$h\mathscr{S}[\mathbb{L}]$ を weak equivalence によって局所化した category を $\mathrm{Ho}(\mathscr{S}[\mathbb{L}])$ とかき、$\mathbb{L}$-spectrum の安定ホモトピー圏（stable homotopy category）と呼ぶ。

Theorem 0.1.16

forgetfull functor である $\mathscr{S}[\mathbb{L}] \longrightarrow \mathscr{S}$ は left adjoint

$$\mathbb{L} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}[\mathbb{L}]$$

を持つ。このとき、さらに

$$\mathrm{Ho}(\mathbb{L}) : \mathrm{Ho}(\mathscr{S}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ho}(\mathscr{S}[\mathbb{L}])$$

は（adjoint）equivalence of category である。

Definition 0.1.17

$M,N \in \mathscr{S}[\mathbb{L}]$ に対し、

$$\xi : (\mathscr{L}(1) \otimes \mathscr{L}(1)) \ltimes (M \wedge N) \cong (\mathscr{L}(1) \ltimes M) \wedge (\mathscr{L}(1) \ltimes N) \xrightarrow{\xi \wedge \xi} M \wedge N$$

により定義する。このとき、$M \wedge_{\mathscr{L}} N \in \mathscr{S}[\mathbb{L}]$ を coequalizer

$$(\mathscr{L}(2) \times \mathscr{L}(1) \otimes \mathscr{L}(1)) \ltimes (M \wedge N) \rightrightarrows^{\gamma \ltimes 1}_{1 \ltimes \xi} \mathscr{L}(2) \ltimes (M \wedge N) \longrightarrow M \wedge_{\mathscr{L}} N$$

で定義する。ただし、$(\mathscr{L}(2) \times \mathscr{L}(1) \otimes \mathscr{L}(1)) \ltimes (M \wedge N) \cong \mathscr{L}(2) \ltimes ((\mathscr{L}(1) \otimes \mathscr{L}(1)) \ltimes (M \wedge N))$ と考えられる。

Proposition 0.1.18

There is natural commutivity isomorphism of $\mathbb{L}$-spectra

$$\tau : M \wedge_{\mathscr{L}} N \longrightarrow N \wedge_{\mathscr{L}} M$$

Theorem 0.1.19

There is natural associativity isomorphism of $\mathbb{L}$-spectra

$$\alpha : M \wedge_{\mathscr{L}} (N \wedge_{\mathscr{L}} P) \longrightarrow (M \wedge_{\mathscr{L}} N) \wedge_{\mathscr{L}} P$$