0.1 Spectrum

Definition 0.1.1

$X = \{X_n, \sigma_n\}_{n \geqq 0}$ が spectrum とは、各 $n \geqq 0$ に対し X_n が基点つき空間と、stracture map と呼ばれる $\sigma_n : \Sigma X_n \longrightarrow X_{n+1}$ の組である。adjoint を考えると stracture map は $\widetilde{\sigma}_n : X_n \longrightarrow \Omega X_{n+1}$ と考えることもできる。

stracture map である $\Sigma X_n \longrightarrow X_{n+1}$ が homotopy equivalence のとき Σ-spectrum と呼び、$X_n \longrightarrow \Omega X_{n+1}$ が homotopy equivalence のとき Ω-spectrum と呼ぶ。

X, Y を spectrum としたとき、spectrum の写像 $f : X \longrightarrow Y$ とは、連続写像の族

$$\{f_n : X_n \longrightarrow Y_n\}_{n \geqq 0}$$

であり、

$$\begin{tikzcd} \Sigma X_n \arrow[r, "\Sigma f_n"] \arrow[d, "\sigma_n"'] & \Sigma Y_n \arrow[d, "\sigma_n"] \\ X_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"'] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

が可換となる。

spectrum の圏を $\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ と書く。また Σ-spectrum の full sub category を $\Sigma^{\mathbf{N}}$、Ω-spectrum の full sub category を $\Omega^{\mathbf{N}}$ と書くことにする。普通は、Sp^{∞}、Σ^{∞}、Ω^{∞} と書くことが多いようだが。

Example 0.1.2

$\Sigma S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1}$ を stracture map とすると、球面の列は Σ-spectrum となる。これを球面 spectrum と呼ぶ。

π を Abelian group とする。$K(\pi, n) \xrightarrow{\simeq} K(\pi, n+1)$ を stracture map とすると、Eilenberg MacLane 複体の列は Ω-spectrum となる。これを Eilenberg MacLane spectrum と呼ぶ。

Definition 0.1.3

$Ev_n : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{TOP}_*$ を $Ev_n(X) = X_n$ で定義し、evaluation functor と呼ぶ。また、$F_n : \mathbf{TOP}_* \longrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ を

$$(F_nX)_m = \begin{cases} \Sigma^{m-n}X & n \leqq m \\ * & \text{otherwise} \end{cases}$$

さらに、$M_n : \mathbf{TOP}_* \longrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ を

$$(M_nX)_m = \begin{cases} \Omega^{n-m}X & m \leqq n \\ * & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。

Proposition 0.1.4

$$F_n : \mathbf{TOP}_* \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} : Ev_n$$

であり、

$$Ev_n : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \Longleftrightarrow \mathbf{TOP}_* : M_n$$

proof) $X \in \mathbf{TOP}_*$ と $Y \in \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ に対し、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{TOP}_*}(X, Ev_nY) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}}(F_nX, Y)$$

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{TOP}_*}(X, Ev_nY) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{TOP}_*}(X, Y_n)$ に対し、

$$(F_nX)_m = \Sigma^{m-n}X \xrightarrow{\Sigma^{m-n}f} \Sigma^{m-n}Y_n \xrightarrow{\sigma_{m-1}\circ\Sigma(\sigma_{m-2})\circ\cdots\circ\Sigma^{m-n-1}(\sigma_n)} Y_m$$

で定義すればよい。inverce は、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}}(F_nX, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{TOP}_*}(X, Ev_nY)$$

は $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}}(F_nX, Y)$ に対し、$g_n : (F_nX)_n = X \longrightarrow Y_n$ とすればよい。

□

Proposition 0.1.5

$\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ は任意の limit と colimit で閉じている。

proof) D を small category として、$F : D \longrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ を任意の functor とする。このとき、

$$(\mathrm{colim}F)_n = \mathrm{colim}Ev_n \circ F \quad , \quad (\mathrm{lim}F)_n = \mathrm{lim}Ev_n \circ F$$

で定義し stracture map は、

$$\Sigma(\mathrm{colim} Ev_n \circ F) \xrightarrow{\cong} \mathrm{colim}(\Sigma \circ Ev_n \circ F) \xrightarrow{\mathrm{colim}(\sigma\circ F)} \mathrm{colim}(Ev_{n+1} \circ F)$$

とする。注意として Σ は left adjoint functor 、よって preserve colimit なので始めの同型が成り立つ。しかし Σ は limit についての関連はない。しかし limit の定義から、

$$\Sigma(\lim Ev_n \circ F) \longrightarrow \lim(\Sigma \circ Ev_n \circ F) \xrightarrow{\lim(\sigma\circ F)} \lim(Ev_{n+1} \circ F)$$

は構成できる。これを limit の structure map にすればよい。

□

Definition 0.1.6

$\Sigma : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ を $(\Sigma X)_n = \Sigma X_n$、structure map を

$$\Sigma(\sigma) : \Sigma(\Sigma X)_n = \Sigma(\Sigma X_n) \longrightarrow (\Sigma X)_{n+1} = \Sigma X_{n+1}$$

で定義する。同様に、$\Omega : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ を $(\Omega X)_n = \Omega X_n$、structure map を

$$\Omega(\widetilde{\sigma}) : (\Omega X)_n = \Omega X_n \longrightarrow \Omega(\Omega X)_{n+1} = \Omega(\Omega X_{n+1})$$

Proposition 0.1.7

$$\Sigma : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \Longleftarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} : \Omega$$

proof) 通常の位相空間の時の adojoin を参考に。

□

以下で、spectrum の model 構造について考える。注意として位相空間の model 構造といった場合には、ここでは Quillen による構造、つまり cofibrantly generated の構造が入っているとする。

Definition 0.1.8

$f \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}})$ に対し、これが level equivalence（cofibration、fibration）であるとは、各 $n \leqq 0$ において、f_n が位相空間における weak equivalence（cofibration、fibration）とする。また、f が任意の acyclic fibration に対し LLP を持つとき、f を peojective cofibration と呼ぶ。

Theorem 0.1.9

TOP$_*$ の generationg cofibration、acyclic cofibration をそれぞれ I, J としたとき、$\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ の morphism の集合として、

$$I' = \bigcup_{n \geqq 0} F_n(I) \quad , \quad J' = \bigcup_{n \geqq 0} F_n(J)$$

と定義する。このとき、$\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ の morphism の指定を、

1. weak equivalence is level equivalence
2. fibration is level fibration
3. cofibration is projective cofibration

と定義すれば、これにより $\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ は I', J' を generating cofibration、acyclic cofibration をする cofibrantly generated model category となる。

proof)　$F_n : \mathbf{TOP}_* \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} : Ev_n$ は weak equivalence、cofibration、fibration を互いに保ったまま移してくれる。さらに Ev_n は colimit を保つので、**TOP**$_*$ の model 構造をそのまま反映した形で $\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ に定義されたような model 構造が入れられる。

□

この model 構造を level（projective） model structure と呼ぶ。実はこのほかにも stable model structure と呼ばれる model 構造も考えられる。

Definition 0.1.10

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

の可換図が homotopy pull back squere であるとは、f, g が fibration であり、図式の pull back において、

$$X \longrightarrow Y \times_W Z$$

が weak equivalene のことをいう。

Definition 0.1.11

$X \in \mathbf{TOP}_*$ に対し、$\Sigma^m X$ の counit map である

$$\eta : \Sigma^m X \longrightarrow \Omega\Sigma(\Sigma^m X) = \Omega\Sigma^{m+1} X$$

を考え、

$$\Omega^m(\eta) : \Omega^m \Sigma^m X \longrightarrow \Omega^{m+1}\Sigma^{m+1} X$$

を定義し、この colimit として、

$$QX = \mathrm{colim}_m \Omega^m \Sigma^m X$$

で定義する。

Definition 0.1.12

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}}(X, Y)$ が

1. stable equivalence であるとは、stable homotopy group 間の誘導

$$\pi_*(f) : \pi_m^s = \mathrm{colim}_n \pi_{m+n}(X_n) \longrightarrow \mathrm{colim}_n \pi_{m+n}(Y_n) = \pi_m^s(Y)$$

が任意の $m \geqq 0$ に対し同型であることをさす。

2. stable cofibration であるとは、$f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ が monomorphism であり、

$$\begin{tikzcd} \Sigma X_{n-1} \arrow[r, "\Sigma f_{n-1}"] \arrow[d, "\sigma"'] & \Sigma Y_{n-1} \arrow[d, "\sigma"] \\ X_n \arrow[r, "f_n"'] & Y_n \end{tikzcd}$$

の図式の push out で

$$X_n \coprod_{\Sigma X_{n-1}} \Sigma Y_{n-1} \longrightarrow Y_n$$

が $n > 0$ に対し、monomorphism となることである。

3. stable fibration であるとは、level fibration であり、任意の $n \geqq 0$ に対し、

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "\mathrm{counit}"] \arrow[d, "f_n"'] & QX_n = \mathrm{colim}_m \Omega^m \Sigma^m X_n \arrow[d, "Q(f_n)"'] \\ Y_n \arrow[r, "\mathrm{counit}"] & YX_n = \mathrm{colim}_m \Omega^m \Sigma^m Y_n \end{tikzcd}$$

が homotopy pull back squere である。

Theorem 0.1.13

$\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ は以下の morphism の指定で model category となる。

1. weak equivalence is stable equivalence
2. cofibration is stable cofibration
3. fibration is stable fibration

この構造を stable model structure と呼ぶ。