0.1 Triangulated category

Derived category から特定の情報を抜き出して、Triangulated category というものを考える。Triangulated category の定義は元々、代数的な見地から行われてきた。Abelian category の Derived category を model に考えられてきたのだから確かにそれは頷けるのだが、幾何的な見方からすると不満が残る。というのも、位相圏の homotopy category が triangulated category ではない……というより Triangulated category の前提を満たしていない。それ以外の triangle に関する条件はなんとなくよさそうな気がするのだが。

というわけで、Hovey らは triangulated category の定義を修正し、model category においてもその議論を行えるようにした。Hovey の本「model category」の中で先に言った代数的 triangulated category は classic triangulated category として定義されている。Hovey は結局 Ho($\mathbf{SSet}_*$)-module で閉じている category で議論しているが、初めは古典的な定義でなれたほうが良い。

Definition 0.1.1

C を category で $T : C \longrightarrow C$ を fanctor とする。このとき、C, T における triangle とは、C の diagram

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow T(A)$$

である。T はtransformation fanctor と呼ばれ、triangle は $A \longrightarrow B \longrightarrow C \xrightarrow{[1]} A$ と書くときもある。２つの triangle 間の morphism とは、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & T(A')
\end{tikzcd}$$

を可換にする morphism の組 (α, β, γ) であり、isomorphism はこれらの morphism がすべて C での isomorphism であるときとする。

Definition 0.1.2 *Triangulated category*

C が triangulated category とは、C が Additive category で、$T : C \longrightarrow C$ が additive fanctor かつ equivalence of category であるものと、C, T における triangle の族 DT が与えられ、次を満たす。（ここで DT の object を distinglish triangle とよぶ。略して d.t と書く）

1. d.t と isomorphic な triangle は d.t である。

2. 任意の $A \in \mathrm{ob}(C)$ に対し、$0 \longrightarrow A \xrightarrow{=} A \longrightarrow T(0) = 0$ は distinglish である。

3. 任意の morphism である $f : A \longrightarrow B$ に対し、 $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow T(A)1$ という d.t が存在する。

4. 次の 2 つの d.t と可換図式、

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] & T(A) \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & T(A') \end{tikzcd}$$

において $\gamma : C \longrightarrow C'$ が存在し図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & T(A') \end{tikzcd}$$

5. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A)$ が d.t であることと、$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} T(A) \xrightarrow{-T(f)} T(B)$ が d.t であることは同値。

6. 次の 3 つの d.t

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow D \xrightarrow{[1]} A$$

$$B \xrightarrow{g} C \longrightarrow E \xrightarrow{[1]} B$$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C \longrightarrow F \xrightarrow{[1]} A$$

を考えたとき、次の図式を可換にする morphism が存在する。

$$
\begin{tikzcd}
& F \arrow[dr, dotted, "v"] \arrow[ddl] & \\
D \arrow[ur, dotted, "u"] \arrow[d] & & E \arrow[ll, dotted, "{[1]}"'] \arrow[ddl] \\
A \arrow[rr, "g\circ f"'] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[u] \arrow[uul] \\
& B \arrow[ur, "g"'] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}
$$

つまり、$D \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} E \xrightarrow{[1]} D$ が d.t となるような morphism が存在し、上の図式の triangle 以外のところはすべて可換になる。

最後の公理は octahedral axiom と呼ばれて、これをはずしたものが pre-triangulated category と呼ばれるが、Hovey 流の定義で pre-triangulated category と言った場合にはまた違った定義になる。

これ以後 $\mathcal{D}$ は triangulated category とし、[1] を transformation functor、そして distingulish triangle のことを単に triangle と呼ぶことにする。

Remmark 0.1.3

$\mathcal{D}^{op}$ は $[-1]$ を transormation functor として triangulated category となる。ちなみに triagngle は、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

が $\mathcal{D}$ の triangle として、

$$Z \xrightarrow{f^{op}} Y \xrightarrow{g^{op}} X \xrightarrow{h[-1]^{op}} Z[-1]$$

というものである。

Lemma 0.1.4

$[1] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ は product と coproduct を保つ。

proof)　[1] は category equivalence なので、naturan isomorphism

$$\mathrm{Hom}(X[1],Y) \cong \mathrm{Hom}(X,Y[-1]) \quad , \quad \mathrm{Hom}(X[-1],Y) \cong \mathrm{Hom}(X,Y[1])$$

が $[-1]$、$[1]$ により与えられ、$[1]$ は $[-1]$ の left adjoint かつ right adjoint であることが分かる。一般に left adloint は colimit を、right adjoint は limit を保つ。

□

Proposition 0.1.5

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

を triangle とする。このとき、$g \circ f = h \circ g = f[1] \circ h = 0$ である。

proof)　triangulated category の公理より

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "="] \arrow[d, "="'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X[1] \arrow[d, "="] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

の図式で上下は triangle なので、すべてを可換にするような morphism が存在するが、これは 0 である。よって、$g \circ f = 0$ である。triangle を shift すれば残りの合成も 0 であることが分かる。

□

Proposition 0.1.6

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

を triangle とする。このとき、任意の $W \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ に対し、

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}(W,X[i]) \xrightarrow{f[i]_*} \mathrm{Hom}(W,Y[i]) \xrightarrow{g[i]_*} \mathrm{Hom}(W,Z[i]) \xrightarrow{h[i]_*} \mathrm{Hom}(W,X[i+1]) \longrightarrow \cdots$$

と、

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}(X[i+1],W) \xrightarrow{h[i]^*} \mathrm{Hom}(Z[i],W) \xrightarrow{g[i]^*} \mathrm{Hom}(Y[i],W) \xrightarrow{f[i]^*} \mathrm{Hom}(X[i],W) \longrightarrow \cdots$$

は exact sequence.

proof) 面倒なので上列の $i=0$ の場合、つまり、

$$\mathrm{Hom}(W,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(W,Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(W,Z)$$

の場合だけ見てみる。あとは shift でどうとでもなる。Prop 0.1.5 により、$g \circ f = 0$ なので、$g_* \circ f_* = 0$ は良い。

$\varphi \in \mathrm{Hom}(W,Y)$ に対し、$g_*(\varphi) = g \circ \varphi = 0$ とする。このとき、

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[1] \arrow[r, "-1[1]"] \arrow[d, dotted, "\psi"'] & W[1] \arrow[d, "\varphi[1]"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"'] & Y[1]
\end{tikzcd}$$

を可換にする $\psi : W[1] \longrightarrow X[1]$ が存在するので、

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "="] \arrow[d, "{\psi[-1]}"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & W[1] \arrow[d, "\psi"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

が可換ということは、$f_*(\psi[-1]) = f \circ \psi[-1] = \varphi$ である。

□

Corollary 0.1.7

Triangulated category の公理により、２つの triangle に対し、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] & X[1] \\
U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & U[1]
\end{tikzcd}$$

の可換図式から、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"'] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\
U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r] & U[1]
\end{tikzcd}$$

を可換にする h が存在するが、f, g が isomorphism ならば、h もそうである。

proof)　　Prop 0.1.6 により、

$$\begin{CD}
\mathrm{Hom}(W,X) @>>> \mathrm{Hom}(W,Y) @>>> \mathrm{Hom}(W,Z) @>>> \mathrm{Hom}(W,X[1]) @>>> \mathrm{Hom}(W,Y[1]) \\
@V{f_*}VV @V{g_*}VV @V{h_*}VV @V{f[1]_*}VV @V{g[1]_*}VV \\
\mathrm{Hom}(W,U) @>>> \mathrm{Hom}(W,V) @>>> \mathrm{Hom}(W,W) @>>> \mathrm{Hom}(W,U[1]) @>>> \mathrm{Hom}(W,V[1])
\end{CD}$$

このうち h_* 以外は isomophism なので、h_* もそうである。これはつまり、

$$^{\exists}\varphi : W \longrightarrow Z \quad \text{s.t} \quad h \circ \varphi = 1_W$$

である。また、$\mathrm{Hom}(Z, -)$ で今の議論を繰り返すと、

$$^{\exists}\psi : W \longrightarrow Z \quad \text{s.t} \quad \psi \circ h = 1_Z$$

であり、$\varphi = \psi \circ h \circ \varphi = \psi$ となるため、h は isomorphism である。

$\square$

Corollary 0.1.8

Triangulated category の公理により、$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ に対し、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$$

が存在するが、これは unique up to isomorphic である。

proof)　　$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ に対し、これから始まる 2 つの triangle

$$\begin{CD}
X @>{f}>> Y @>>> Z @>>> X[1] \\
@V{=}VV @V{=}VV \\
X @>>{f}> Y @>>> W @>>> X[1]
\end{CD}$$

を考えれば、あとは Cor 0.1.7 による。

$\square$

Proposition 0.1.9

2つの triangle

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \quad , \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1]$$

に対し、その直和

$$X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z' \xrightarrow{h \oplus h'} X[1] \oplus X'[1] \cong (X \oplus X')[1]$$

も triangle である。

proof)　公理により、

$$X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \longrightarrow W \longrightarrow (X \oplus X')[1]$$

という triangle が存在する。よって、

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r, "f \oplus f'"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y \oplus Y' \arrow[r] \arrow[d, "pr_1"'] & W \arrow[r] & (X \oplus X')[1] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

の図式から $W \longrightarrow Z$ が得られ、同様にした列を $'$ に変えて $W \longrightarrow Z'$ も得られる。これより、

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r] \arrow[d, "="'] & Y \oplus Y' \arrow[r] \arrow[d, "="'] & W \arrow[r] \arrow[d] & (X \oplus X')[1] \arrow[d, "="] \\
X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r] & Z \oplus Z' \arrow[r] & (X \oplus X')[1]
\end{tikzcd}$$

が得られるわけだが、あとは $W \longrightarrow Z \oplus Z'$ が isomorphism なら下列が triangle であることが示せる。これは Cor 0.1.7 の証明を使う。下列は triangle であることは分かっていないが、$\mathrm{Hom}(-, A)$ を取れば、coproduct が保たれ2つの exact sequence の直和となり exact になる。よって Cor 0.1.7 の証明を習えば、$W \longrightarrow Z \oplus Z'$ は isomorphism であるので

$$X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z' \xrightarrow{h \oplus h'} X[1] \oplus X'[1] \cong (X \oplus X')[1]$$

は triangle である。

Corollary 0.1.10

上記の命題はより一般に $\oplus X_\lambda \longrightarrow \oplus Y_\lambda \longrightarrow \oplus Z_\lambda \longrightarrow (\oplus X_\lambda)[1]$ についても成り立つ。双対的に直積についても同様である。

Corollary 0.1.11

任意の $X, Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ に対し、

$$X \xrightarrow{(1,0)} X \oplus Y \xrightarrow{0,1} Y \xrightarrow{0} X[1]$$

は triangle である。

proof) $X \xrightarrow{=} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ が triangle で、$Y \xrightarrow{=} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow Y[1]$ を左に shift した $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{=} Y \longrightarrow 0$ も triangle なので、この 2 つを直和すれば求める triangle が得られる。

$\square$

Proposition 0.1.12

2 つの sequence

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \quad , \quad X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} X'[1]$$

で、chain complex のようにいずれも 2 回合成すると 0 になるものに対し、その直和

$$X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Y \oplus Y' \xrightarrow{g \oplus g'} Z \oplus Z' \xrightarrow{h \oplus h'} X[1] \oplus X'[1] \cong (X \oplus X')[1]$$

が triangle ならば、2 つの sequence は triangle である。

proof) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ が triangle であることを示す。まず、任意の $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$

$$\mathrm{Hom}(Z, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, A)$$

は、仮定により半完全である。また、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Z \arrow[d, "{(1,0)}"] \\ X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r] & Z \oplus Z' \end{tikzcd}$$

の可換図で $\mathrm{Hom}(-,A)$ を取れば、下列は完全になり、しかも $\mathrm{Hom}(-,A)$ の直和の形に分かれる。その図式で考えれば、

$$\mathrm{Hom}(Z,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,A)$$

が完全であるのは簡単に分かる。次に、

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow W \longrightarrow X[1]$$

という triangle が公理から存在する。

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & W \arrow[r] \arrow[d, dotted] & X[1] \arrow[d, "{(1,0)}"'] \\
X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r] & Z \oplus Z' \arrow[r] & X[1] \oplus X'[1]
\end{tikzcd}$$

という morphism が上下が triangle なので存在する。一方、

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Y \oplus Y' \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & Z \oplus Z' \arrow[r] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & X[1] \oplus X'[1] \arrow[d, "{(1,0)}"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

の図式は考えられ、これを繋げると、

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "="'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "="'] & W \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "="'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

の可換図式が得られるが、下列は $\mathrm{Hom}(-,A)$ を取ると完全列になったので、Cor 0.1.7 を習えば、$W \longrightarrow Z$ は isomorphism となり、上列が triangle なので下列もそうなる。

$\square$